

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
SEDE QUITO

CARRERA:
INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de:
INGENIERO ELECTRÓNICO

TEMA:
ESTUDIO COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE TRES TIPOS DE
CONTROLADORES PARA EL PÉNDULO INVERTIDO FURUTA

AUTOR:
ANDRÉS EDUARDO SALAZAR ANDRADE

TUTORA:
LUISA FERNANDA SOTOMAYOR REINOSO

Quito, julio de 2018

CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Yo, Andrés Eduardo Salazar Andrade con documento de identificación N° 1720174646, manifiesto mi voluntad y cedo a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que soy autor del trabajo de titulación intitulado: “ESTUDIO COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE TRES TIPOS DE CONTROLADORES PARA EL PÉNDULO INVERTIDO FURUTA”, mismo que ha sido desarrollado para optar por el título de: Ingeniero Electrónico, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En aplicación a lo determinado en la Ley de Propiedad Intelectual, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada. En concordancia, suscribo este documento en el momento que hago entrega del trabajo final en formato impreso y digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.



Andrés Eduardo Salazar Andrade

Cédula: 1720174646

Fecha: julio de 2018

DECLARATORIA DE COAUTORÍA DEL DOCENTE TUTOR/A

Yo, declaro que bajo mi dirección y asesoría fue desarrollado el Proyecto técnico, “ESTUDIO COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE TRES TIPOS DE CONTROLADORES PARA EL PÉNDULO INVERTIDO FURUTA”, realizado por Andrés Eduardo Salazar Andrade, obteniendo un producto que cumple con todos los requisitos estipulados por la Universidad Politécnica Salesiana, para ser considerados como trabajo final de titulación.

Quito, julio de 2018



Luisa Fernanda Sotomayor Reinoso

Cédula de identidad: 1710953967

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi querida madre y a mi querido padre quienes, con su amor, paciencia y esfuerzo, contribuyeron con el apoyo moral y económico de toda mi carrera y la finalización de este proyecto. También dedico a mis profesores quienes al tener paciencia en cada una de mis inquietudes supieron brindar sus conocimientos, y la Universidad Politécnica Salesiana por abrirme sus puertas, para darme la oportunidad de cumplir mis metas planteadas y los objetivos obtenidos en todos estos años de estudio y permitirme dejar una investigación que será muy útil para mis compañeros y docentes de esta gran institución.

AGRADECIMIENTO

Mis más sinceros agradecimientos a mis queridos padres y a todos mis familiares por todo el apoyo recibido por todos estos años, a mi novia por su apoyo y nunca dejarme dar por vencido y a todas esas personas cercanas. También mi gran agradecimiento a mi tutora quien ha sido una gran ayuda para la elaboración de este proyecto, a mis compañeros de curso quienes me brindaron su ayuda cuando más lo necesitaba. Extiendo mi agradecimiento a los científicos de la rama del mundo tecnológico de la electrónica que con sus invenciones y actuales descubrimientos me han permitido ampliar los conocimientos de este trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

| | |
|--|------|
| CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR..... | i |
| DECLARATORIA DE COAUTORÍA DEL DOCENTE TUTOR/A..... | ii |
| DEDICATORIA | iii |
| AGRADECIMIENTO | iv |
| ÍNDICE DE FIGURAS..... | viii |
| ÍNDICE DE TABLAS | x |
| RESUMEN..... | xi |
| ABSTRACT..... | xii |
| INTRODUCCIÓN | xiii |
| CAPÍTULO 1 | 1 |
| ANTECEDENTES..... | 1 |
| 1.1 Problema de estudio | 1 |
| 1.2 Justificación..... | 2 |
| 1.3 Objetivos | 2 |
| 1.3.1 Objetivo general | 2 |
| 1.3.2 Objetivos específicos | 2 |
| 1.4 Metodología..... | 3 |
| CAPÍTULO 2..... | 4 |
| FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA..... | 4 |
| 2.1 Péndulo simple | 4 |
| 2.2 Péndulo invertido | 4 |
| 2.3 Péndulo invertido Furuta | 5 |
| 2.4 Controladores | 7 |
| 2.5 Control PID | 7 |
| 2.6 Control LQR..... | 8 |
| 2.7 Control Fuzzy | 9 |

| | | |
|------------------------------|---|----|
| 2.8 | Modelo matemático de un sistema | 10 |
| CAPÍTULO 3 | | 11 |
| DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN..... | | 11 |
| 3.1 | Sistema de péndulo invertido Furuta | 11 |
| 3.2 | Diseño e implementación mecánica | 12 |
| 3.3 | Diseño e implementación electrónica..... | 15 |
| 3.4 | Modelo matemático | 16 |
| 3.4.1 | Cinemática..... | 16 |
| 3.4.2 | Expresiones de energía..... | 17 |
| 3.4.3 | Ecuaciones de movimiento | 18 |
| 3.4.4 | Representación de modelos en espacios de estados | 19 |
| 3.4.5 | Puntos de equilibrio | 20 |
| 3.4.6 | Linealización alrededor del punto de equilibrio..... | 20 |
| 3.5 | Función de transferencia | 22 |
| 3.5.1 | Función de transferencia para el péndulo invertido Furuta linealizado..... | 22 |
| 3.6 | Diseño de los controladores PID, LQR y Fuzzy | 23 |
| 3.6.1 | Diseño del controlador PID..... | 24 |
| 3.6.2 | Diseño del Regulador Cuadrático Lineal (LQR) | 27 |
| 3.6.3 | Diseño del controlador Fuzzy | 30 |
| 3.7 | Implementación de los controladores | 33 |
| 3.7.1 | Implementación del diseño de control PID | 33 |
| 3.7.2 | Implementación del diseño de control LQR | 33 |
| 3.7.3 | Implementación del diseño Fuzzy..... | 34 |
| 3.8 | Diseño e implementación del control Swing up..... | 34 |
| 3.8.1 | Diseño del control Swing up | 35 |
| 3.8.2 | Diseño del control Swing up | 35 |

| | | |
|---------------------------------|--|----|
| 3.9 | Base de datos | 36 |
| 3.9.1 | Diseño base de datos | 36 |
| 3.9.2 | Integral del error absoluto IAE | 36 |
| 3.9.3 | Implementación base de datos | 37 |
| CAPÍTULO 4 | | 38 |
| COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO | | 38 |
| 4.1 | Pruebas de funcionamiento | 38 |
| 4.1.1 | Pruebas de funcionamiento con el uso de Swing up | 38 |
| 4.1.2 | Pruebas de funcionamiento sin el uso de Swing up | 40 |
| 4.1.3 | Respuestas de los controladores a perturbaciones | 42 |
| 4.2 | Comparación de controladores | 44 |
| CONCLUSIONES | | 49 |
| RECOMENDACIONES | | 50 |
| BIBLIOGRAFÍA | | 51 |
| ANEXOS | | 53 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2. 1 Esquema del péndulo invertido | 4 |
| Figura 2. 2 Diagrama del péndulo invertido Furuta | 6 |
| Figura 2.3 Diagrama de bloques del controlador PID..... | 8 |
| Figura 2. 4. Lazo de control Fuzzy | 9 |
| Figura 2. 5. Modelo matemático | 10 |
| Figura 3.1. Esquema de entrada y salidas | 11 |
| Figura 3.2. Grafica de control del sistema | 12 |
| Figura 3.3 Diseño y partes de la estructura mecánica..... | 13 |
| Figura 3.4 Mecanismo del péndulo invertido Furuta | 13 |
| Figura 3.5 Implementación de la estructura mecánica..... | 14 |
| Figura 3.6 Implementación del mecanismo del sistema | 15 |
| Figura 3.7 Esquema del lazo de control de conexión STM32 a PC..... | 23 |
| Figura 3.8 Control General del sistema..... | 24 |
| Figura 3.9 Curva estabilizadora | 25 |
| Figura 3.10 Parámetros de configuración | 26 |
| Figura 3.11 Diagrama de diseño del control PID..... | 27 |
| Figura 3.12 Diagrama de diseño del control LQR | 29 |
| Figura 3.13 ventana FIS Editor | 30 |
| Figura 3.14 Entrada del error de posición | 31 |
| Figura 3.15 Entrada de la variación del error..... | 31 |
| Figura 3.16 Salida al péndulo | 31 |
| Figura 3.17 Diagrama de diseño del control Fuzzy | 32 |
| Figura 3.18 Implementación del control PID..... | 33 |
| Figura 3.19 Implementación del control LQR | 34 |
| Figura 3.20 Implementación del control Fuzzy | 34 |
| Figura 3.21. Diagrama del diseño del control Swing up..... | 35 |

| | |
|--|----|
| Figura 3.22 Implementación del control Swing up | 36 |
| Figura 4. 1 Prueba del control LQR | 38 |
| Figura 4. 2 Prueba del control PID..... | 39 |
| Figura 4. 3 Prueba del control PID..... | 39 |
| Figura 4. 4 Prueba del control Fuzzy | 40 |
| Figura 4. 5 Prueba del control LQR | 41 |
| Figura 4. 6 Prueba del control PID..... | 41 |
| Figura 4. 7 Prueba del control Fuzzy | 42 |
| Figura 4. 8 Respuesta del controlador LQR a perturbaciones | 43 |
| Figura 4. 9 Respuesta del controlador PID a perturbaciones | 43 |
| Figura 4. 10 Respuesta del controlador Fuzzy a perturbaciones..... | 44 |
| Figura 4. 11 Respuesta de los tres controladores a perturbaciones..... | 45 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 2. 1 Descripción de las variables de estado del péndulo invertido. | 5 |
| Tabla 2. 2 Descripción de las variables de estado del péndulo invertido Furuta. ... | 7 |
| Tabla 3.1 Parámetros del sistema..... | 21 |
| Tabla 3.2 Parámetros del sistema..... | 22 |
| Tabla 3.3 Reglas de inferencia | 30 |
| Tabla 3. 4. Reglas de pertenencia..... | 32 |
| Tabla 4. 1 Resultado del IAE a las perturbaciones | 45 |
| Tabla 4. 2 IAE sin Swing up | 46 |
| Tabla 4. 3 IAE activado el Swing up | 47 |
| Tabla 4. 4 IAE con perturbación desactivo el Swing up..... | 48 |

RESUMEN

Al ser el péndulo invertido Furuta un sistema importante complejo, no lineal e inestable de la electrónica industrial se hace trascendente el estudio y análisis de su comportamiento cuando se aplica diferentes técnicas de control para estabilizarlo. Para poder aplicar los controladores se construye el péndulo Furuta, cuyo diseño se puede observar en la Figura 3.3, destacando para este análisis las masas y longitud tanto del brazo, péndulo y masa pendular. Con estos datos se procedió a obtener el modelo matemático y posteriormente las ecuaciones del sistema. Los tres tipos de controladores son: Proporcional, Integral, Derivativo (PID), Regulador Cuadrático Lineal (LQR) y Fuzzy. Se realizaron tres tipos de pruebas de funcionamiento las cuales son dos con el uso de Swing up y la otra desactivando el Swing up, con 20 muestras de cada prueba, cuyos resultados se almacenaron en una base de datos para posteriormente analizarlos utilizando el integral del error absoluto (IAE). Como conclusión se puede decir que los controles que mejor se adaptaron a esta planta construida son Fuzzy y LQR dependiendo de su posición inicial.

Palabras clave: Péndulo invertido Furuta, PID, LQR, Fuzzy, IAE.

ABSTRACT

As the Furuta inverted pendulum is a complex, non-linear and unstable system of industrial electronics, the study and analysis of its behavior is made transcendent when different control techniques are applied to stabilize it. In order to apply the controllers, the Furuta pendulum is built, whose design can be seen in Figure 3.3, highlighting for this analysis the masses and length of both the arm, pendulum and pendulum mass. With these data we proceeded to obtain the mathematical model and later the system equations. The three types of controllers are: Proportional, Integral, Derivative (PID), Linear Quadratic Regulator (LQR) and Fuzzy. Three types of performance tests were performed, which are two with the use of Swing up and the other deactivating the Swing up, with 20 samples of each test, whose results were stored in a database and later analyzed using the integral of the error absolute (IAE). In conclusion, it can be said that the controls that were best adapted to this built floor are Fuzzy and LQR depending on their initial position.

Keywords: Inverted pendulum Furuta, PID, LQR, Fuzzy, IAE.

INTRODUCCIÓN

En la industria existen aplicaciones de este sistema de péndulo invertido uno de los más conocidos es el vehículo de transporte personal segway. El objetivo de este trabajo es analizar, comprender, visualizar el funcionamiento de un péndulo invertido Furuta cuando se aplica diferentes controladores. Este sistema es un gran desafío debido a su inestabilidad además que su estructura mecánica puede generar perturbaciones propias del sistema.

Para lograr estos objetivos este escrito se lo ha estructurado de siguiente forma. En el capítulo 1 se describe el problema de estudio, justificación los objetivos que se desean alcanzar y la metodología a usarse. En el capítulo 2 se describe la fundamentación teórica donde se hablará del péndulo invertido Furuta, los controladores PID, LQR y Fuzzy que serán utilizados.

En el capítulo 3 se diseña el sistema del péndulo invertido Furuta las especificaciones para la construcción mecánica y electrónica, se obtiene el modelo matemático analizando la cinemática y sus expresiones de energía, para así obtener la función de transferencia, con esto se diseña e implementan los controles PID, LQR y Fuzzy, utilizando la herramienta Simulink de Matlab.

En el capítulo 4 se hará un análisis de funcionamiento de los controladores utilizando el Swing up para que suba el péndulo colocándole el péndulo en la zona de control, se realizan 20 muestras las cuales serán almacenadas en una base de datos para aplicar el integral de error absoluto, verificando cual es el mejor controlador de los tres tipos de pruebas.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

En este capítulo se detalla el problema de estudio, justificación, objetivo general y específicos del proyecto y la metodología que se usará para implementar los tres controles en el péndulo invertido Furuta.

1.1 Problema de estudio

Los sistemas de péndulo invertido Furuta tienen varias aplicaciones en la industria como, en aeroespacial en los despegues es necesario mantener el cohete en posición vertical invertida y el control es necesario para conservar de esa forma, control de estabilidad de grúas, para el desplazamiento de personas se fabrica vehículos personales como el segway o patinetas eléctricas como Hoverboard. Por lo que es trascendental su investigación.

En la mayoría de los casos el péndulo invertido Furuta es utilizado como ejemplo académico, ya que es accesible en los sistemas de control, y permite exponer las diferencias entre un lazo abierto y su equilibrio en lazo cerrado.

¿Se podrá controlar con tres tipos diferentes de control un péndulo invertido Furuta?

Este péndulo Furuta es conocido por ser uno de los problemas complejos e importantes para la teoría de control. Se describe a una inestabilidad de control y la no linealidad del mismo. Regularmente se utiliza para el análisis educativo, especialmente por ser muy asequible, además que concede demostrar las primordiales discrepancias del control. Existe un gran conjunto de numerosas técnicas de diseños, pero no pueden ser la opción idónea. (Beltrán, 2010)

La intención principal del péndulo invertido es mantenerse en una posición vertical equilibrada y automáticamente el mayor tiempo posible. Para lograrlo hay que aplicar un sistema de controlador que permita realizarlo por lo cual se pretende utilizar los sistemas de control de PID, LQR y Fuzzy.

1.2 Justificación

Con el progreso de la ciencia, las técnicas de control han ido cambiando dependiendo a las necesidades de la industria y la investigación.

Al ser el péndulo invertido Furuta un sistema importante y complejo de la electrónica industrial, se hace trascendente su estudio y para analizar su comportamiento cuando se le aplica diferentes tipos de control. El estudio del desempeño permitirá establecer las firmezas y fragilidades de estos controladores.

Existen varias maneras de diseñar un controlador que permita estabilizar de manera automática al péndulo invertido Furuta, pero en este caso se ha optado por tres controladores, de este modo se determinara beneficios y perjuicios para aplicaciones reales en procesos.

El control que se aplica en el péndulo invertido Furuta es PID clásico, los controles adicionales que realizaran no se han aplicado en el Laboratorio de Electrónica de la Universidad Politécnica Salesiana, por lo que este estudio beneficiara principalmente a los estudiantes y a los docentes.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Comparar el desempeño de tres tipos de controladores en el péndulo invertido Furuta mediante la Integral del Error Absoluto (IEA), para la determinación del control más idóneo.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar la planta de péndulo invertido Furuta para obtener su modelo matemático mediante las señales de entrada y salida.
- Diseñar tres sistemas de control PID, LQR y Fuzzy para la estabilización del péndulo invertido Furuta.
- Implementar los controladores PID, LQR y Fuzzy para el control del péndulo invertido Furuta.
- Elaborar una base de datos con la información de pruebas y resultados de la aplicación de los controladores PID, LQR y Fuzzy para su posterior análisis

- Comparar el desempeño de los controladores por medio de la Integral del Error Absoluto (IEA) para la determinación del control más idóneo del péndulo.

1.4 Metodología

Para obtener su modelo matemático del péndulo invertido Furuta se realizará una metodología práctica y sistemática, siguiendo los manuales y las necesidades del proyecto.

Para estabilizar el péndulo invertido Furuta el diseño de los tres sistemas de control se realizará la metodología teórica, análisis y síntesis, teniendo en cuenta las restricciones físicas.

En la implementación se utilizará la metodología sistemática práctica y teórica siguiendo el diseño realizado.

Para analizar el desempeño de los controladores se determinará experimentalmente el integral del error absoluto de cada controlador.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo se presentará información teórica necesaria para comprender el funcionamiento de los movimientos del péndulo, además conocer los diferentes tipos de controladores, para aplicarlos al péndulo invertido Furuta.

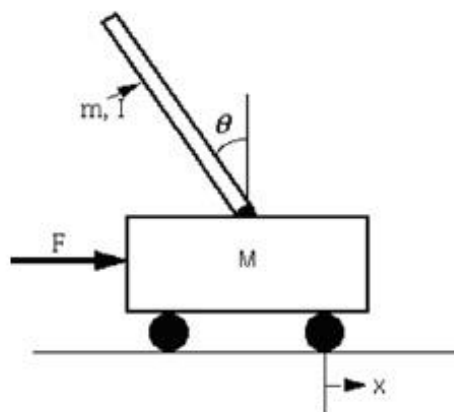
2.1 Péndulo simple

El péndulo es un componente físico y consiste en una masa unida mediante barra hacia un pivote, el sistema se mueve libremente ejecutando un movimiento de vaivén alrededor de su punto de equilibrio, sin influencia de fuerzas y en condiciones naturales el dispositivo quedará en ese lugar, este sistema tan conocido desde épocas pasadas y con el pasar del tiempo se ha desarrollado al punto de que en la actualidad es utilizado como punto de partida en el estudio del control lineal y no lineal. El péndulo invertido planar comúnmente es analizado por su popularidad. (Buitrago, García, & Ramírez, 2015, pág. 326)

2.2 Péndulo invertido

Para lograr su movimiento de vaivén lo realiza con el uso de un deslizador que proveerá movimiento de un carro sobre un riel y a todo este mecanismo se lo conoce como péndulo invertido. La velocidad, posición del coche y el ángulo del péndulo con relación a la vertical se consigue medir en este sistema. Para el deslizamiento del riel se usa un motor y una cinta unida al carro. (Luna, 2003, pág. 7)

Figura 2. 1 Esquema del péndulo invertido



Esquema del péndulo invertido, (Beltran & Salazar Morocho, 2010)

En la Figura 2.1 se observa al péndulo invertido lineal, cuyos elementos que la conforman se detalla en la Tabla 2.1 se tiene que la masa del carro M , la masa en el final del péndulo m , la fricción b y la longitud del centro de masa l son valores constantes y dependen de su fabricación, mientras que la fuerza aplicada al carro F , el ángulo del péndulo respecto de la vertical θ y la posición del carro x son variables. El movimiento se logra al aplicar la fuerza F sobre el carro o cambiando el ángulo de giro del péndulo. (Garcia, 2015)

Tabla 2. 1 Descripción de las variables de estado del péndulo invertido.

| Símbolo | Parámetro |
|----------|--|
| F | Fuerza aplicada al carro |
| m | Masa del péndulo |
| I | Inercia del péndulo |
| θ | Ángulo del péndulo respecto de la vertical |
| M | Masa del carro |
| x | Coordenadas de posición del carro |
| b | Fricción del carro |
| l | Longitud al centro de masa del péndulo |

Descripción de las variables de estado del péndulo invertido. (Beltran & Salazar Morocho, 2010)

2.3 Péndulo invertido Furuta

El péndulo invertido lineal muestra restricciones de mecanismos en la oscilación del carro y por lo tanto para el diseño se debe considerar estas restricciones; esto tuvo solución con la substitución del carro sobre carril por un motor eléctrico para el manejo directo de un brazo horizontal, como se muestra en la Figura 2.2. (Buitrago, García, & Ramírez, 2015)

Este dispositivo es conocido como el péndulo invertido rotacional simple o de Furuta y está conformado por dos elementos, el primero es un brazo horizontal y el movimiento es generado por un motor (dc) también conocido como sistema actuado, el segundo pertenece al péndulo el cual oscila libremente en el plano vertical o sistema sub-actuado. Por tanto, se obtiene dos grados de libertad y una entrada que será la encargada del control de movimiento.

El péndulo invertido Furuta es un punto de referencia para el examinar y aprender estrategias de control tradicional y actual, lineal y no lineal, al igual que es

utilizado con propósitos educativos como el caso de la instrucción de la teoría de control y el modelado de procedimientos físicos. (Buitrago, García, & Ramírez, 2015)

Figura 2. 2 Diagrama del péndulo invertido Furuta

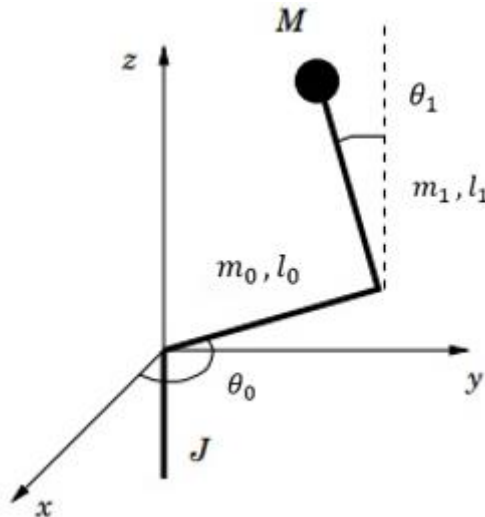


Diagrama del péndulo invertido Furuta en el plano cartesiano 3D, (Gäfvert, 1998)

En la Figura 2.2 se observa al péndulo invertido Furuta en el plano cartesiano 3D, que está formado de dos elementos inerciales acoplados entre que lo conforman esto se detalla en la Tabla 2.2 de las cuales la masa homogéneamente distribuida en línea m_0 , la masa colocada en el final del péndulo m_1 , un brazo horizontal de longitud l_0 , la longitud del pendulo l_1 , son valores constantes y dependen de su fabricación, mientras que pilar central con momento de inercia J , el ángulo del péndulo respecto de la vertical, y positivo cuando el movimiento es en orientación a las agujas del reloj θ_1 y el ángulo del brazo, y positivo cuando el movimiento está en orientación contraria a las agujas del reloj θ_1 , son variables. (Gäfvert, 1998)

Para el control de un péndulo invertido rotacional simple se constituye universalmente de dos fases: en primer lugar es el movimiento de vaivén que permita al péndulo llegar a la posición vertical hacia arriba, por tal motivo se utiliza el Swing up, este tipo de sistema generalmente se utiliza análisis de energía con el fin de obtener una táctica de control y la segunda etapa se necesita indagar el análisis para el control que gestione la estabilidad del péndulo y debido al cambio de tácticas de control a esto se lo conoce como control conmutado. Hay una gran diversidad de técnicas de control para lograr que el péndulo llegue al

punto de estabilización con una misma técnica, a esto se lo denomina como control sin conmutación. Estas estrategias de control generalmente se ejecutan si tomar en cuenta a la fricción. (Buitrago, García, & Ramírez, 2015)

Tabla 2. 2 Descripción de las variables de estado del péndulo invertido Furuta.

| Símbolo | Parámetro |
|------------|---|
| J | Pilar central con momento de inercia |
| l_0 | Brazo horizontal de longitud |
| m_0 | Masa homogéneamente distribuida |
| θ_0 | Angulo del brazo |
| l_1 | Longitud del péndulo |
| m_1 | Masa del péndulo |
| θ_1 | Ángulo del péndulo |
| M | Cuerpo de equilibrio con punto de masa distribuida. |

Descripción de las variables de estado del péndulo invertido Furuta. (Osorio, 2009)

2.4 Controladores automáticos

La función principal es la semejanza entre la entrada del valor requerido y el valor existente en la salida, y se establecerá la desviación la cual causará una señal de control con un valor muy cercano a cero. Se denominará acción de control a una señal producida por el controlador. Generalmente la señal de error detectada por el controlador posee un valor muy pequeño, entonces se amplifica hasta lograr lo deseado. El controlador será la salida del sistema y de este dependerá para que el actuador se desempeñe de la mejor manera. (Ogata, 2010)

En esta sección se describe los tres tipos de controladores que estabilizaran la posición inestable del péndulo invertido Furuta.

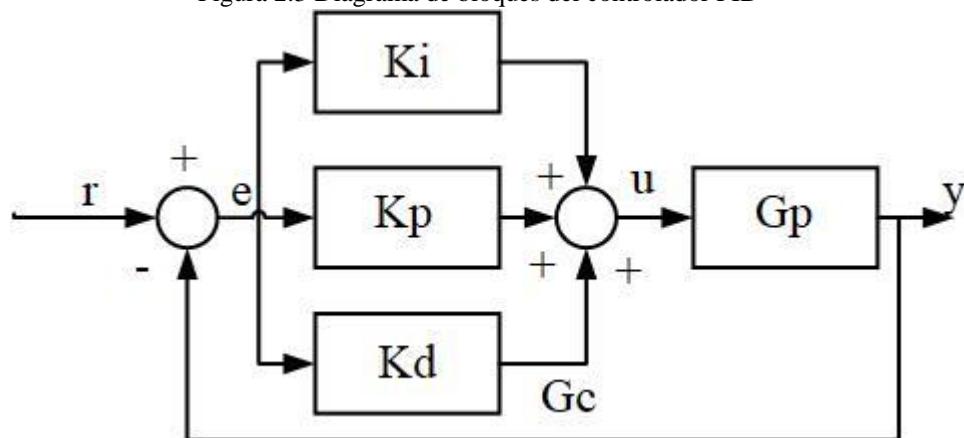
2.5 Control PID

Es un controlador proporcional, integral y derivativo (PID), el cual se encargará de corregir alguna acción con el propósito de reducir la discrepancia entre la referencia requerida y la salida del sistema, a esto se lo denomina error. El control se desempeña en diferentes niveles y estos son:

- Proporcional, precisara el error en el momento de la acción.
- Integral, rectificara el error con el uso de la integral con el fin disminuirlo a cero (error estacionario).
- Derivativo, establecerá la acción del tiempo, en que el error se ejecuta.

En la Figura 2.3 se observa el esquema de bloques del control PID. Si es posible determinar el modelo matemático del sistema, se puede emplear varios métodos de diseño, para establecer las medidas requeridas del controlador que desempeñe los detalles del estado momentáneo y fijo del lazo cerrado de control. Pero si es complicado obtener el modelo matemático del sistema, es imposible obtener un método de diseño para el controlador. En dicho caso se optará por métodos empíricos para el ajuste de los mismos. (Ogata, 2010)

Figura 2.3 Diagrama de bloques del controlador PID



Visualización del diagrama del PID, Elaborado por: Andrés Salazar

2.6 Control LQR

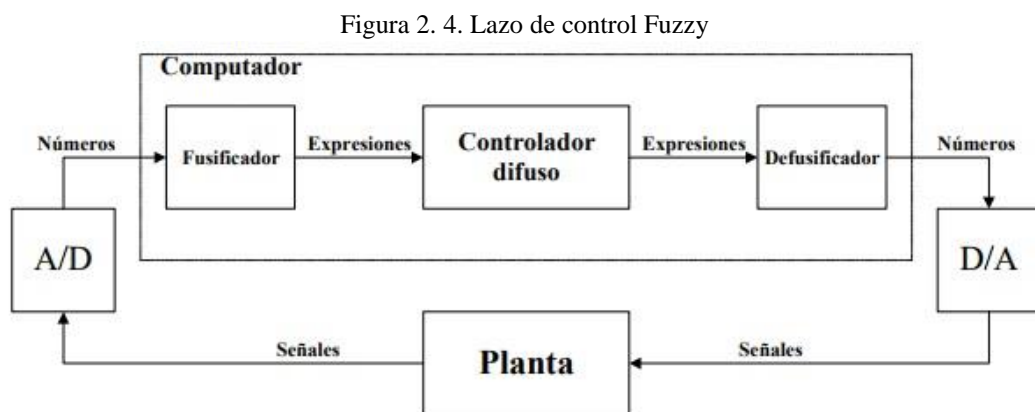
El objetivo del Regulador Cuadrático Lineal, existe un sin fin de complicaciones de control de estabilidad con referencia de alguna zona de equilibrio, esto indica que los valores establecidos para este sistema se mantengan en la salida. Es imposible determinar valores en cada intervalo sin conocer cómo se encuentra el estado en ese momento. Por tal motivo se requiere que el control a implementarse pueda identificar el contraste que hay entre el valor de la posición de péndulo y la referencia establecida. Esta destreza es conocida como realimentación, y para resolver el inconveniente existente se hace uso de retroalimentación negativa, para determinar en cada momento que tan distante se halla la señal de respuesta y la de referencia. (Hernández, Legaspi, Peláez, Santos, & Martín, 2012)

En ciertos momentos, es posible que el problema se dificulte entonces será necesario el uso de cierto componente adicional para alcanzar a optimizarlo. A todo esto, se logra utilizando el LQR. (Hernández, Legaspi, Peláez, Santos, & Martín, 2012)

2.7 Control Fuzzy

Como un método interpretativo se puede definir al control de lógica difusa, donde los elementos son enlazados con conjuntos de límites no definidos, concediendo un valor de pertenencia respectiva y no tan minuciosa como es habitualmente la lógica. Se puede expresar que exista entre fronteras una interpolación, así mismo entre conjuntos, otorgando obtener elementos que muestran un estado confuso que se expresa en palabras como: está más o menos baja la temperatura, este tipo de términos son comúnmente hallados en la cotidianidad, pero son inadmisibles en la lógica tradicional. (Valenzuela, Montoya, & Giraldo, 2013)

La fase de fusificación, les entrega a los valores de entrada a un nivel de membresía adentro de las diferentes posibles expresiones, para lograrlo se explora la comunicación entre la fase de las variables, y las funciones de pertenencia determinadas para tal intención. Como se observa en la Figura 2.4, los diferentes cambios de las variaciones y los valores en el lazo de Fuzzy. (Kouro & Musalem, 2002)



Descripción del lazo de control Fuzzy. (Kouro & Musalem, 2002)

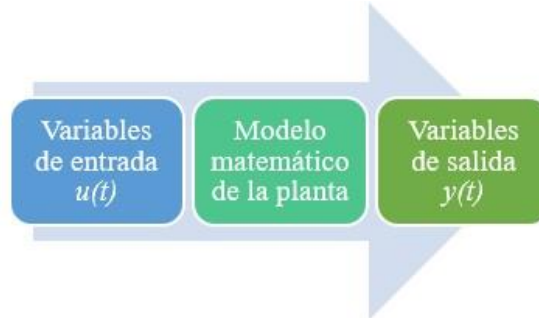
Se descifran por sentido habitual la definición de una serie de relaciones, que permita crear una acción deseada que pueda ser utilizada en la planta. Inmediatamente será cambiada a un valor (defusificación), posteriormente actúe el

conversor D/A y la señal pueda ser implementada en el sistema. (Kouro & Musalem, 2002)

2.8 Modelo matemático de un sistema

Se puede utilizar de distintos métodos a los modelos. Dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas, puede ser más conveniente que otros como se indica en la Figura 2.5.

Figura 2. 5. Modelo matemático



Descripción del modelo matemático. Elaborado por: Andrés Salazar

Con la función de transferencia se puede ser más beneficioso para representar una síntesis de la respuesta transitoria como también la respuesta en el dominio de la frecuencia de sistemas linealizados con una sola salida y entrada que no posee variaciones en el tiempo. Para resumirlo y posterior estudio se usa diferentes maneras de analizarlos como la utilización de computadoras. (Ogata, 2010, pág. 14)

CAPÍTULO 3

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN

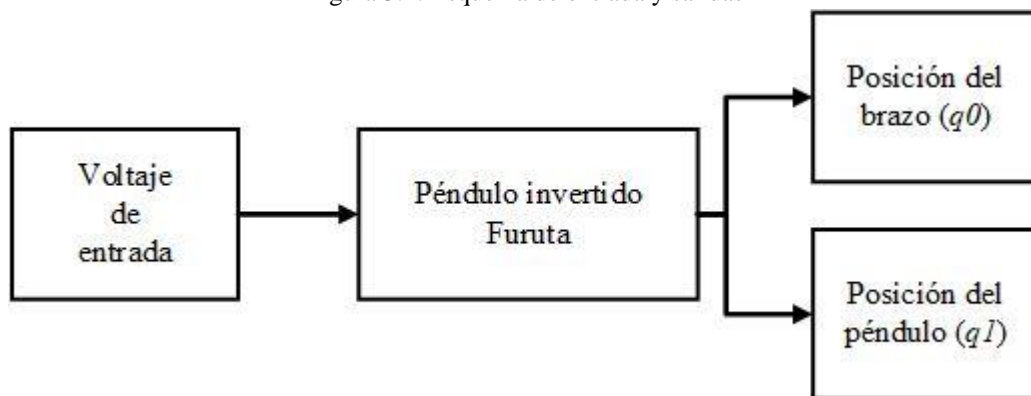
En este capítulo se describe cómo va ser el funcionamiento del sistema, el diseño y materiales para su implementación. El modelo matemático utilizando el álgebra de Euler Lagrange para conseguir el modelo no lineal de la planta y posteriormente la linealización. Para el diseño de los controladores se utilizará la plataforma de Simulink de Matlab. Finalmente se implementará en el péndulo invertido Furuta para sus respectivas pruebas y calibraciones.

3.1 Sistema de péndulo invertido Furuta

Como se ha explicado en el capítulo anterior el objetivo del péndulo invertido Furuta es controlar el ángulo del péndulo con la ayuda de los giros horario y antihorario del motor y el para qué sistema se establezca en el menor tiempo posible.

Realizando el análisis del péndulo invertido Furuta, se determinó que es un sistema SIMO (Entrada única y salidas múltiples), en este caso de investigación se va a tomar al voltaje como entrada y la posición del brazo q_0 y la posición del péndulo q_1 como salidas las cuales se indica en el esquema de la Figura 3.1.

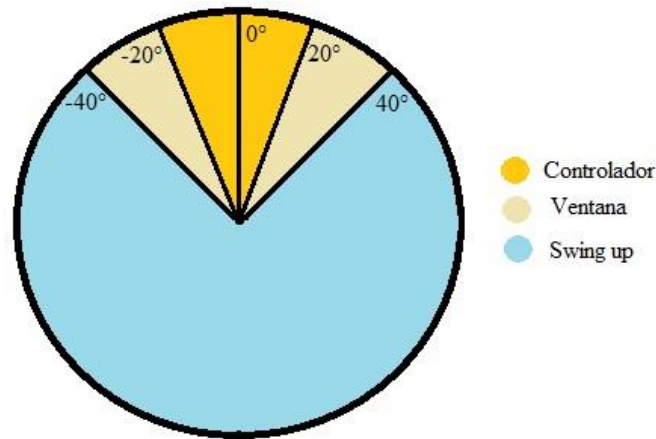
Figura 3.1. Esquema de entrada y salidas



Esquema del sistema SIMO para este caso. Elaborado por: Andrés Salazar

Analizando el comportamiento del péndulo ya sea en reposo o en posición vertical invertida, se divide en tres zonas en las cuales va actuar el sistema, en la Figura 3.2 se detalla como funcionara el sistema en cada región.

Figura 3.2. Grafica de control del sistema



Regiones de donde actúa el péndulo. Elaborado por: Andrés Salazar

Controlador, el péndulo estará en posición hacia arriba en un rango de $\pm 20^\circ$ busca estabilizarse en 0° siguiendo los cambios de referencia del brazo, en esta acción la planta esta encarga de mantener dicho lugar el mayor tiempo posible.

Ventana, para impedir que el péndulo adquiriera un incremento de aceleración muy grande, en esta zona se deja que caiga el péndulo por efecto de la gravedad y llegue a la zona de Swing up para que este le de ese impulso necesario que le permita alcanzar nuevamente al punto de equilibrio o al área de control, en esta región el péndulo se halla en posición inestable de $\pm 30^\circ$.

Swing up, en esta zona es donde el péndulo necesita del balanceo para alcanzar las dos regiones mencionadas anteriormente, su rango de movimiento es de $\pm 270^\circ$, para lograr este vaivén se necesita que el brazo genere movimiento y que impulse al péndulo con aceleración y logre estabilizarse la su posición hacia arriba.

Tomando en cuenta el análisis anterior, el diseño físico del péndulo invertido Furuta se lo puede dividir en dos partes, mecánico y electrónico.

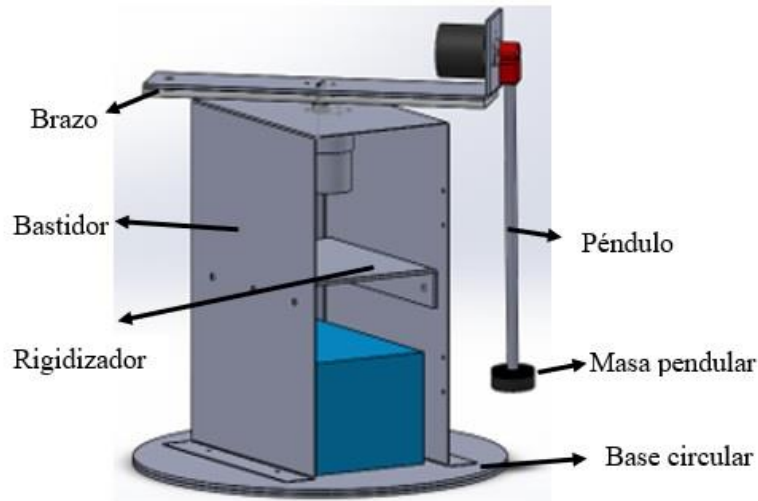
3.2 Diseño e implementación mecánica

El desarrollo del diseño mecánico para el péndulo invertido Furuta, consta de varias partes, las cuales deben cumplir con las especificaciones determinadas para su implementación. Se estableció los siguientes criterios:

El péndulo tiene que ser de fácil movilidad, estético, que no tenga perturbaciones por su construcción, que su estructura sea firme y que sus materiales posean durabilidad.

Para las dimensiones del diseño se consideró que pueda ser de fácilmente transportado a diferentes áreas donde se lo requiera. Los dibujos de los diseños se adjuntarán en el anexo 1.

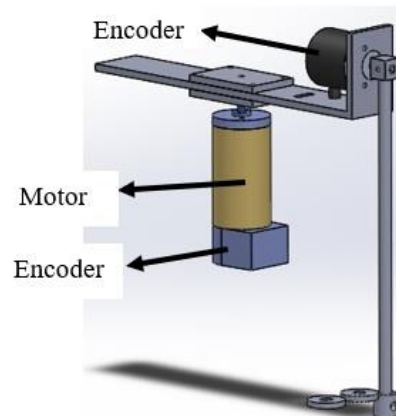
Figura 3.3 Diseño y partes de la estructura mecánica



Diseño de la estructura mecánica, Elaborado por: Andrés Salazar

Como se muestra en la Figura 3.3, para disminuir las vibraciones se añadió un rigidizador que su función en esta implementación es ajustar el bastidor del péndulo, ayudar con más peso para reducir vibraciones de movimiento y mejorar la estabilidad para el sistema.

Figura 3.4 Mecanismo del péndulo invertido Furuta



Diseño del mecanismo de movimiento, Elaborado por: Andrés Salazar

Cómo se observa en la Figura 3.4, el diseño para el mecanismo de movimiento del péndulo invertido Furuta, está compuesto por un motor DC reductor de 12 Vdc con encoder que va a estar sujeto en el bastidor y unido al brazo para permitir su

Como se observa la Figura 3.5 se seleccionó un soporte rectangular y una forma circular como base de la estructura, ya que posee estabilidad y firmeza, además se implementó doble base esto quiere decir que mide 6 mm de espesor, para aumentar el equilibrio y evitar las perturbaciones al mecanismo.

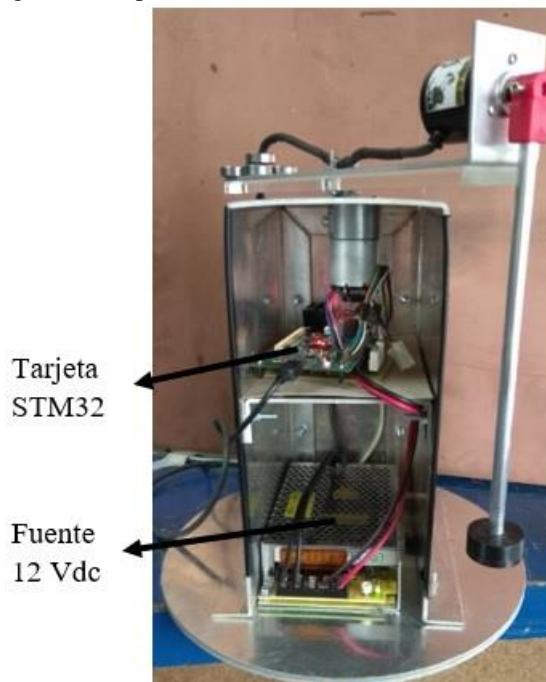
3.3 Diseño e implementación electrónica

Las especificaciones necesarias para la selección del motor se basaron en el precio y principalmente que cumpla con las características requeridas para que el brazo y el péndulo puedan moverse con facilidad. Por lo que se decidió trabajar con el siguiente motor: Motorreductor de metal con codificador 64 CPR.

El control del motor va ser con el uso del driver L298N, este elemento cuenta con protección para el mismo, y utiliza una alimentación de 6 a 12 Vdc, se utilizará una fuente de 12 Vdc a 5 amperios para las diferentes conexiones. Para obtener la posición angular del eje, velocidad y aceleración del rotor del motor se va a usar un encoder de tipo incremental de modelo E6B2C.

Para la realización de la adquisición de datos se escogió la tarjeta STM32F4Discovery, que posee grandes ventajas, entre la que destaca su velocidad de 32 bits, conectividad con cualquier sistema y su incorporación con el software Matlab con la instalación previa de la librería Waijung, que permitirá utilizar todas las herramientas requeridas de programación de este proyecto. Finalmente, la implementación de todos los componentes mecánicos y electrónicos se puede visualizar en la Figura 3.6

Figura 3.6 Implementación del mecanismo del sistema



Implementación del mecanismo del péndulo invertido Furuta, Elaborado por: Andrés Salazar

3.4 Modelo matemático

Basándose en la Figura 2.2 y la Tabla 2.2, la obtención del modelo matemático se fundamenta en la teoría de Euler-Lagrange. (Gäfvert, 1998), (Osorio, 2009)

3.4.1 Cinemática

La posición de un punto P en el péndulo se puede describir con el vector posición

$$r(r_0, r_1) = (r_x(r_0, r_1), r_y(r_0, r_1), r_z(r_0, r_1))^T \quad \text{Ecu. (3. 1)}$$

Con

$$\begin{aligned} r_x(r_0, r_1) &= r_0 \cos \theta_0 - r_1 \sin \theta_0 \sin \theta_1, \\ r_y(r_0, r_1) &= r_0 \cos \theta_0 - r_1 \cos \theta_0 \sin \theta_1, \\ r_z(r_0, r_1) &= r_0 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad \text{Ecu. (3. 2)}$$

Donde, r_0 es la posición radial en el brazo y r_1 es la posición radial del péndulo.

Para cada cuerpo las distancias radiales se miden desde el centro de rotación. La expresión de la velocidad se obtiene a partir de las derivadas con respecto al tiempo de la Ecu. (3.1).

$$v(r_0, r_1) = (v_x(r_0, r_1), v_y(r_0, r_1), v_z(r_0, r_1))^T \quad \text{Ecu. (3. 3)}$$

De un punto P sobre el péndulo, se obtiene

$$\begin{aligned} v_x(r_0, r_1) &= -r_0 \sin \theta_0 \dot{\theta}_0 - r_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0 \dot{\theta}_1 \\ &\quad - r_1 \sin \theta_1 \cos \theta_0 \dot{\theta}_0, \\ v_y(r_0, r_1) &= r_0 \cos \theta_0 \dot{\theta}_0 - r_1 \cos \theta_1 \cos \theta_0 \dot{\theta}_1 \\ &\quad - r_1 \sin \theta_1 \sin \theta_0 \dot{\theta}_0, \\ v_z(r_0, r_1) &= -r_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad \text{Ecu. (3. 4)}$$

La expresión se usará posteriormente para la magnitud de la velocidad del punto P:

$$v^2(r_0, r_1) = (r_0^2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + 2r_0 r_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2, \quad \text{Ecu. (3. 5)}$$

3.4.2 Expresiones de energía

En esta sección se obtendrán las expresiones de energía cinética y potencial. La energía cinética se adquiere resolviendo la siguiente integral.

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm, \quad \text{Ecu. (3. 6)}$$

Utilizando la Ecu. (3.5), y resolviendo la energía potencial:

$$V = g \int r_z dm, \quad \text{Ecu. (3. 7)}$$

Empleando la Ecu. (3.1). Para cada cuerpo se obtendrán las expresiones por separado.

Pilar central

$$v^2 T_c = J \dot{\theta}_0^2 \quad \text{Ecu. (3. 8)}$$

$$V_c = 0; \quad \text{Ecu. (3. 9)}$$

Brazo Horizontal

$$2T_a = \int_0^{l_0} v^2(s, 0) m_0 / l_0 ds \quad \text{Ecu. (3. 10)}$$

$$= \frac{1}{3} m_0 l_0^2 \dot{\theta}_0^2 \quad \text{Ecu. (3. 11)}$$

$$V_0 = 0; \quad \text{Ecu. (3. 12)}$$

Extremidad pendular

$$2T_1 = \int_0^{l_1} v^2(r_1, s) m_1 / l_1 ds \quad \text{Ecu. (3. 13)}$$

$$= m_1 \left(l_0^2 + \frac{1}{3} l_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) \dot{\theta}_0^2 + m_1 l_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \quad \text{Ecu. (3. 14)}$$

$$+ \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0^2$$

$$V_1 = g \int_0^{l_1} r_z(l_1, s) m_1 / l_1 ds; \quad \text{Ecu. (3. 15)}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad \text{Ecu. (3. 16)}$$

El péndulo invertido Furuta tiene una energía cinética total de:

$$T = T_c + T_0 + T_1 \quad \text{Ecu. (3. 17)}$$

Y se obtiene la energía potencial total de

$$V = V_c + V_0 + V_1 \quad \text{Ecu. (3. 18)}$$

3.4.3 Ecuaciones de movimiento

Expresando el Lagrangiano

$$L = T - V \quad \text{Ecu. (3. 19)}$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} &= \tau_0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ecu. (3. 20)}$$

Debido a que τ_0 es el torque externo aplicado a la coyuntura del brazo horizontal.

Las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_0} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} &= \left(J + \left(M + \frac{1}{3} m_0 + m_1 \right) l_0^2 \right) \dot{\theta}_0 \\ &\quad + \left(M + \frac{1}{3} m_1 \right) l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_0 \\ &\quad + \left(M + \frac{1}{2} m_1 \right) l_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= \left(M + \frac{1}{3} m_1 \right) l_1^2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_0^2 \\ &\quad - \left(M + \frac{1}{2} m_1 \right) l_0 l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\ &\quad + \left(M + \frac{1}{2} m_1 \right) g l_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left(M + \frac{1}{2} m_1 \right) l_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \left(M + \frac{1}{3} m_1 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad \text{Ecu. (3. 21)}$$

Utilizando la Ecu. (3.21) en Ecu. (3.20) el resultado es:

$$\alpha = J + \left(M + \frac{1}{3} m_0 + m_1 \right) l_0^2$$

$$\beta = \left(M + \frac{1}{3}m_1\right) l_1^2 \quad \text{Ecu. (3. 22)}$$

$$\gamma = \left(M + \frac{1}{2}m_1\right) l_0 l_1$$

$$\delta = \left(M + \frac{1}{2}m_1\right) g l_1$$

Las ecuaciones de movimiento para el péndulo invertido Furuta son:

$$(\alpha + \beta + \sin^2 \theta_1) \ddot{\theta}_0 + \gamma \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + 2\beta \cos \theta_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 = \tau_0 \quad \text{Ecu. (3. 23)}$$

$$\gamma \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 + \beta \ddot{\theta}_1 - \beta \cos \theta_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_0^2 - \delta \sin \theta_1 = 0$$

Considerando que el par de control se utilizará un motor de corriente continua que será controlado por voltaje (Osorio, 2009):

$$V = R \cdot I + L \frac{di}{dt} + K_e \cdot \dot{\theta}_0 \quad \text{Ecu. (3. 24)}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{R} - \frac{K_e}{R} \cdot \dot{\theta}_0 \quad \text{Ecu. (3. 25)}$$

Donde, R es resistencia, K_e es la constante electromotriz e L la inductancia. Indican las constantes eléctricas del motor.

De la Ecu. (3.25), el efecto inductivo del motor, es despreciada por ser muy pequeña, además se facilita el modelo.

Fundamentando que el par de motor es proporcional a la corriente se obtiene:

$$\tau_0 = K_t \cdot I \quad \text{Ecu. (3. 26)}$$

Se remplaza el valor de K_t por el valor K_e , debido a que son casi idénticos para los motores de corriente continua.

$$\Rightarrow \tau = \frac{K_e}{R} \cdot V - \frac{K_e^2}{R} \cdot \dot{\theta}_0 \quad \text{Ecu. (3. 27)}$$

3.4.4 Representación de modelos en espacios de estados

Utilizando las variables de estado las ecuaciones de movimiento Ecu. 3.23 del péndulo invertido Furuta, es posible reescribir un espacio de estados no lineal, se introducen variables de estado, $x_1 = \theta_0$, $x_2 = \dot{\theta}_0$, $x_3 = \theta_1$, $x_4 = \dot{\theta}_1$ cómo se indica a continuación. (Montoya, Valenzuela, & Buitrago, 2012):

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{Ecu. (3. 28)}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} [\beta\tau_0 - \beta\gamma x_2^2 \cos^2 x_3 \sin x_3 \quad \text{Ecu. (3. 29)}$$

$$- 2\beta^2 x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 + \beta\gamma x_4^2 \sin x_3 \\ - \gamma\delta x_4^2 \sin x_3 - \gamma\delta \cos x_3 \sin x_3]$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad \text{Ecu. (3. 30)}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\beta\gamma x_2^2 \cos^2 x_3 \sin x_3 - \gamma^2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} \quad \text{Ecu. (3. 31)}$$

$$+ \frac{\delta(\alpha + \beta \sin^2 x_3) \sin x_3 - \gamma\tau_0 \cos x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3}$$

$$+ \frac{\beta x_2^2 (\alpha + \beta \sin^2 x_3) \cos x_3 \sin x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3}$$

Las ecuaciones de Ecu. (3.28) a la Ecu. (3.31), representaran que en cualquier punto de operación el sistema físico pueda ser linealizado alrededor un punto de trabajo de utilidad.

3.4.5 Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio, se igualan las derivadas de las variables de estado de la Ecu. 3.29 y Ecu. 3.31, se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, & \cos x_3 \sin x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0, & (\alpha + \beta \sin^2 x_3) \sin x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ecu. (3. 32)}$$

Entonces los puntos de equilibrio del sistema son

$$(x_1, 0, x_3, 0), \\ \text{Donde } x_3 = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ecu. (3. 33)}$$

3.4.6 Linealización alrededor del punto de equilibrio

Sea

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau) \quad \text{Ecu. (3. 34)}$$

De la Ecu. (3.34), el modelo linealizando en el punto de equilibrio:

$$x_0 = (\theta_0, \dot{\theta}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1), \tau_0 = (0,0) \quad \text{Ecu. (3. 35)}$$

Reescribiendo los términos se obtienen:

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta x)}{dt} &= \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_0 + \left. \frac{\delta f}{\delta \tau} \right|_0 \\ \tau &= A\delta x + B\tau \end{aligned} \quad \text{Ecu. (3. 36)}$$

La ecuación de salida de interés puede ser:

$$y = C\delta x + D\tau \quad \text{Ecu. (3. 37)}$$

Linealizando el modelo de espacio de estados, con la Ecu. (3.36) y Ecu. (3.37) se obtiene las matrices A, B, C y D, con constantes propias del sistema físico. Las matrices de la Ecu. (3.38) está considerado la posición vertical superior para el punto de equilibrio.

Los estados del sistema que afectan unos a otros se representa en entrada de la matriz A, las entradas del sistema que afectan a los estados se simbolizan en la entrada de la matriz B, y las partes de los estados que son medidos por las salidas se incorpora en la matriz C y D respectivamente. (Toro , 2009)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{\delta\gamma}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\gamma K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{\delta\alpha}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta K_t^2 \\ \frac{R(\gamma^2 - \beta\alpha)}{\gamma^2 - \beta\alpha} \\ 0 \\ \gamma K_t^2 \\ \frac{R(\gamma^2 - \beta\alpha)}{\gamma^2 - \beta\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{Ecu. (3. 38)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Representación de los parámetros propios del sistema se observa en la Tabla 3.1 y Tabla 3.2.

Tabla 3.1 Parámetros del sistema

| Parámetros del sistema | | |
|--------------------------------|--------|------------------|
| Parámetro | Valor | Unidad |
| Masa del brazo (m_0) | 0.1825 | Kg |
| Masa del péndulo (m_1) | 0.026 | Kg |
| Longitud del brazo (l_0) | 0.13 | m |
| Longitud del péndulo (l_1) | 0.25 | m |
| Balance de Masa (M) | 0.028 | Kg |
| Gravedad (g) | 9.81 | m/s ² |

Constantes del sistema, Elaborado por: Andrés Salazar

Tabla 3.2 Parámetros del sistema

| Constantes del motor | | |
|-------------------------------|-----------|------------------|
| Parámetro | Valor | Unidad |
| Resistencia (R) | 3.6 | Ω |
| Inercia del brazo (J_0) | 7.853E-04 | Kgm ² |
| Inercia del péndulo (J_1) | 1.233E-05 | Kgm ² |
| Constante de torque (k_t) | 0.182 | Nm/A |

Constantes del motor y encoder, Elaborado por: Andrés Salazar

3.5 Función de transferencia

Las matrices A , B , C y D . Para ver cómo se relacionan con la función de transferencia, se aplicará la teoría de Laplace a las Ecu. (3.36) y Ecu. (3.37). (Toro, 2009)

$$sX(s) - x(0) = AX + BU(s) \quad \text{Ecu. (3. 39)}$$

$$Y(s) = CX(s) \quad \text{Ecu. (3. 40)}$$

Para todos los estados las ecuaciones anteriormente descritas, contienen las condiciones iniciales. La Ecu. (3.39) se puede expresar de la siguiente forma:

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \quad \text{Ecu. (3. 41)}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad \text{Ecu. (3. 42)}$$

Donde I simboliza la matriz identidad de $n \times n$. Reemplazando la Ecu. (3.42) en la Ecu. (3.40) se adquiere:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) \quad \text{Ecu. (3. 43)}$$

En definitiva, la función de transferencia de un modelo de estado de Ecu. (3.36) y Ecu. (3.37) es:

$$H(S) = C(sI - A)^{-1}B \quad \text{Ecu. (3. 44)}$$

Donde $H(S)$ es una matriz de $m \times p$, y es una generalización de la función de transferencia.

3.5.1 Función de transferencia para el péndulo invertido Furuta linealizado

Para determinar la función de transferencia se utiliza el siguiente comando en Matlab. Debido a que el péndulo invertido Furuta es un sistema de una entrada dos salidas no se la pueden representar en una sola función de transferencia, por lo cual se obtendrá de manera individual.

[b, a] = ss2tf (A, B, C, D), estas matrices fueron encontradas en la Ecu. (3.28), este comando entrega la función de transferencia para aplicarlos en sistemas de tiempo discreto con transformada Z y para sistemas de tiempo continuo de transformada de Laplace, para el presente trabajo se usa la segunda opción. (Mathworks, s.f.)

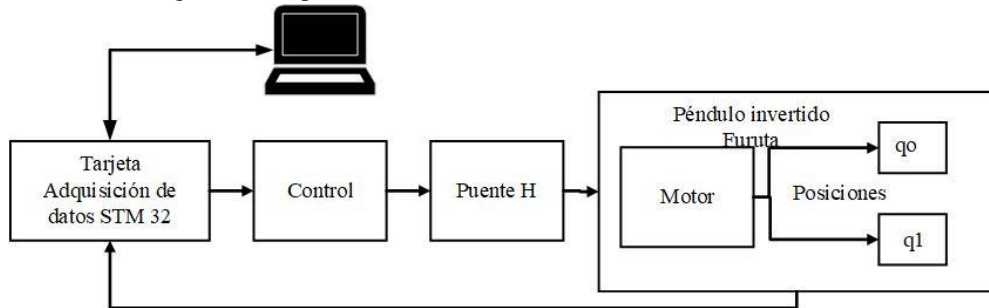
Y además se utilizará el comando de Matlab Tustin, que es la aproximación de Tustin o bilineal produce la mejor combinación de dominio de frecuencia entre los sistemas de tiempo continuo y discretizado. Este método relaciona las funciones de transferencia dominio en s y dominio en z usando la aproximación. (MathWorks, s.f). Entonces la función de transferencia para el movimiento del motor y el péndulo da como resultado:

$$\begin{aligned} motor &= \frac{4.715s^2 + 1.256e^{-14}s - 206.9}{s^4 + 4.715s^3 - 61.3s^2 - 206.9s} \\ pendulo &= \frac{-2.742s^2 - 3.312e^{-15}s - 7.857e^{-31}}{s^4 + 4.715s^3 - 61.3s^2 - 206.9s} \end{aligned} \quad \text{Ecu. (3. 45)}$$

3.6 Diseño de los controladores PID, LQR y Fuzzy

La estrategia de control para la obtención del procedimiento a seguir y que cumpla con las características reales del sistema se tiene que en la tarjeta de la STM32F04 se hace adquisición de datos que genera la señal, para mejorar los tiempos de respuesta se trabaja con la PC y esta envía la señal de control al puente H y después al motor, se obtiene dos movimientos que son de posición del brazo y la posición del péndulo, sus velocidades se pueden obtener matemáticamente derivando, entonces se adquiere las señales de θ_0 , y θ_1 , estas actúan y se generan otras nuevas posiciones, se retroalimentan a la STM32F04 y repite su ciclo como indica la Figura 3.7.

Figura 3.7 Esquema del lazo de control de conexión STM32 a PC



Estrategia de control, Elaborado por: Andrés Salazar

Entonces, para el diseño de los controladores se va aplicar, el modelo matemático y las funciones de transferencia para cada función matemática correspondiente a cada controlador con excepción de Fuzzy que solo se necesita conocer el comportamiento del sistema. En la Figura 3.8 se muestra, el proceso a seguir para el control de forma general del sistema.

Figura 3.8 Control General del sistema

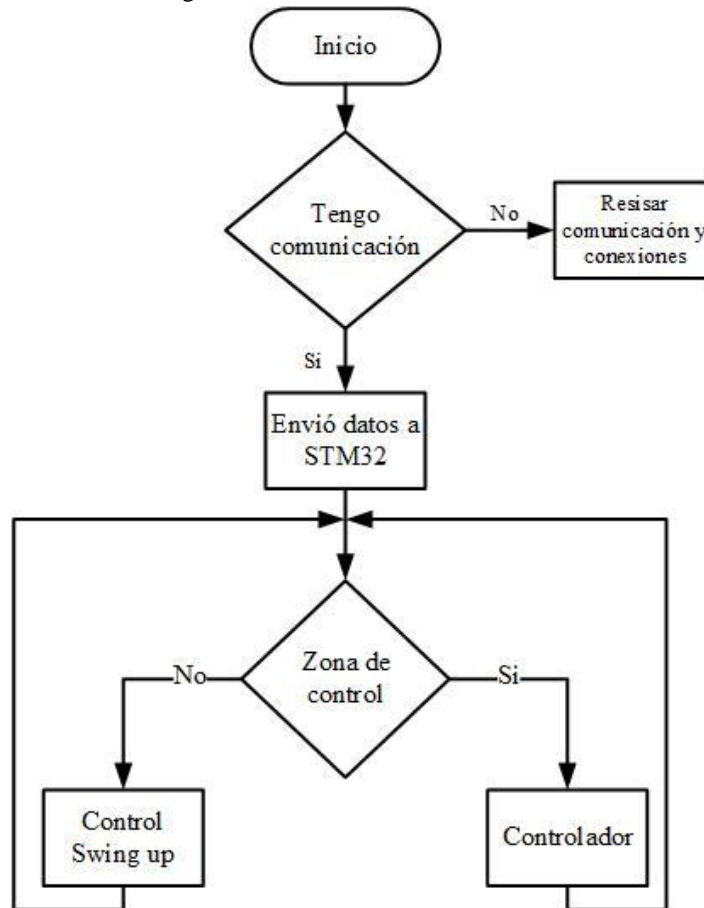


Diagrama general de control del sistema, Elaborado por: Andrés Salazar

Tomando en cuenta la Ecu. (3.45) y el área de acción del péndulo que se explica con la Figura 2.2 se realizaron los siguientes diseños de control.

3.6.1 Diseño del controlador Proporcional, Integral, Derivativo PID

El algoritmo de control proporcional, integral y derivativa, la combinación de estas tres acciones produce una señal de control u , según (Anaguano & Gordillo, 2016) el error e es calculado por el controlador en la función derivativa y la integral, entonces dicha señal es introducida al sistema y el resultado es una salida nueva, que se comparara con una referencia para poder hallar una nueva señal de error que será nuevamente calculada su derivada e integrada, y así sucesivamente.

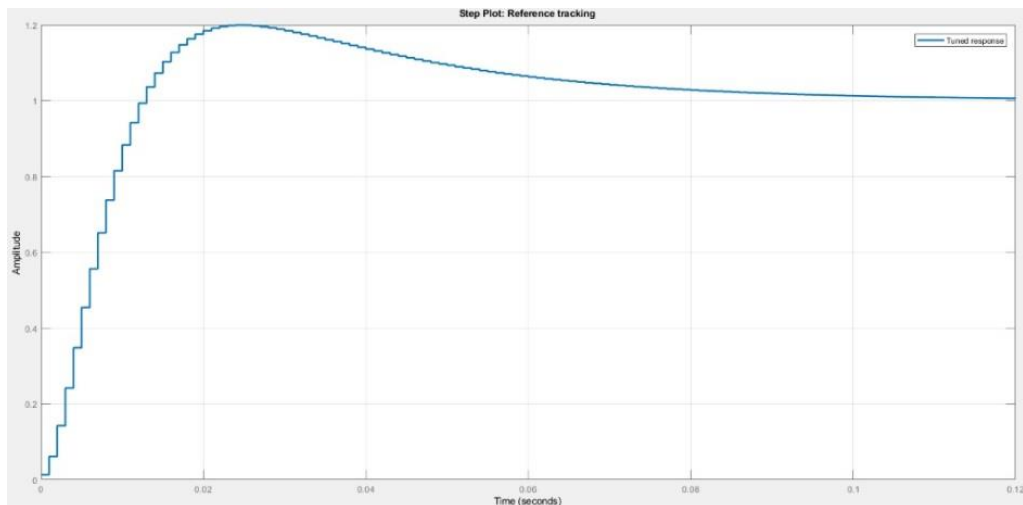
$$u = K_p e(t) + K_d \frac{d}{dt} e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt \quad \text{Ecu. (3. 46)}$$

Donde, K_p es la ganancia de la acción proporcional al error, K_d es la pendiente de la forma de onda de señal de error y K_i es el área debajo de la curva de la señal de error. Para este diseño del controlador PID que se va a tomar en cuenta para este sistema es:

Se utilizará una función de Matlab llamada *PIDF*, que contiene términos, derivativo proporcional, integrador y filtrado. Se usa este tipo de controlador con el fin de disminuir y atenuar la acción de la parte derivativa debido a que la planta tiene bastantes cambios violentos debido a su movimiento.

Se utiliza el comando de Matlab llamado *pidTuner*, que permitirá diseñar de acuerdo a las características que estén presentes en el controlador, posee varios tipos de controladores y el que más interesa en este caso es el de tipo PIDF. Como se observa en la Figura 3.9 la curva sirve para estabilizar el sistema.

Figura 3.9 Curva estabilizadora



Curva estabilizadora del control PID, Elaborado por: Andrés Salazar

La configuración de los parámetros para el equilibrio del péndulo, es el tiempo de establecimiento y el sobre impulso, estos valores se los modifica, como indica la Figura 3.10.

Figura 3.10 Parámetros de configuración

| Controller Parameters | |
|----------------------------|----------------------------|
| | Tuned |
| Kp | -1888.1764 |
| Ki | -16437.7835 |
| Kd | -45.6634 |
| Tf | 0.0020535 |
| | |
| | |
| Performance and Robustness | |
| | Tuned |
| Rise time | 0.009 seconds |
| Settling time | 0.076 seconds |
| Overshoot | 18.3 % |
| Peak | 1.2 |
| Gain margin | -26.8 dB @ 13.3 rad/s |
| Phase margin | -4.05 deg @ 0.000103 rad/s |
| Closed-loop stability | Stable |

Parámetros necesarios para estabilizar, Elaborado por: Andrés Salazar

Entonces la función de transferencia discretizada es:

$$PID = \frac{-3.462e^4 z^2 + 6.809e^4 z - 3.348e^4}{z^2 - 1.222z - 0.2221} \quad \text{Ecu. (3. 47)}$$

La cual va a ser implementada en Simulink de Matlab, como se indica en la Figura 3.11, se incorpora el procedimiento a alcanzar para el control PID.

Figura 3.11 Diagrama de diseño del control PID

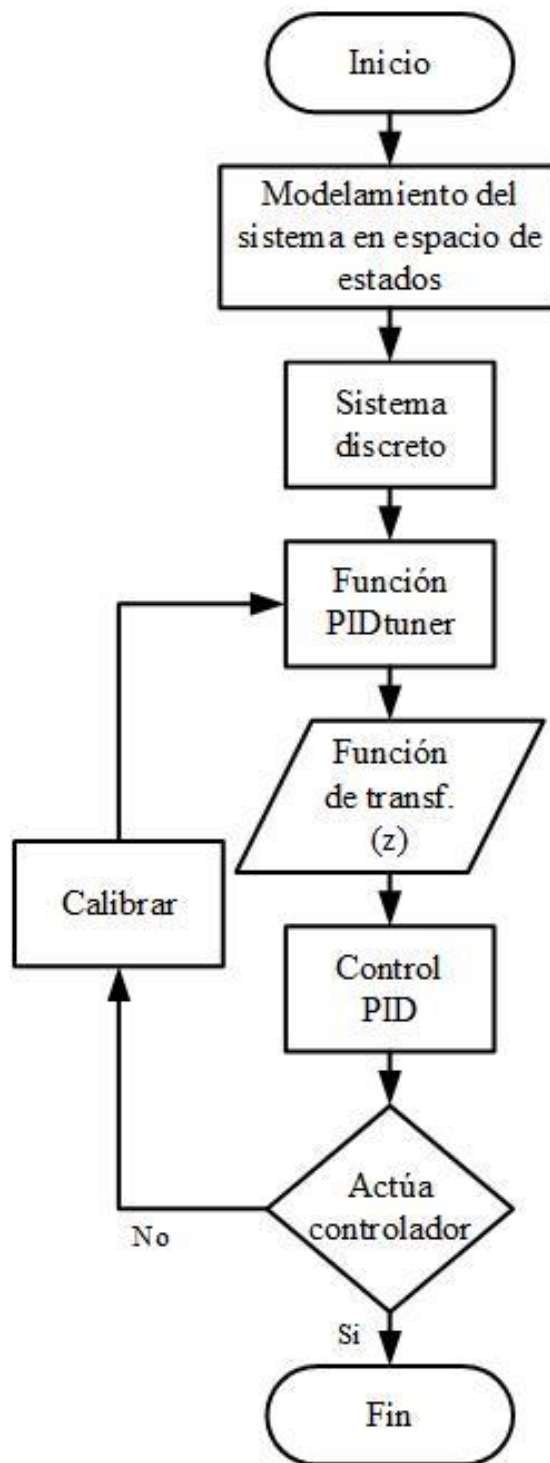


Diagrama del controlador PID, Elaborado por: Andrés Salazar

3.6.2 Diseño del Regulador Cuadrático Lineal (LQR)

Debido a que ya se tiene representado el sistema en el espacio de estados, ya definido en las ecuaciones Ecu. (3.28) a la Ecu. (3.31), en un punto de equilibrio $(0,0,0,0)$. (Osorio, 2009). Basándose en (Toro , 2009), que el control ya definido

en la Ecu. (3.36), se busca hallar un vector de control $u(t)$, se delimita la relación de desempeño cuadrático en tiempo continuo como:

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Qx(t) + Ru^2(t)\} dt \quad \text{Ecu. (3. 48)}$$

Donde, Q es la matriz simétrica positiva y R es la matriz de costo de las entradas

El termino Q mide la desviación del estado, son lo pesos o ponderación que va a poseer la entrada y R ponderación de salida. Como indica (Anaguano & Gordillo, 2016) el objetivo del control LQR es encontrar valores de u que minimicen la función J Se determina la matriz K para el vector del control óptimo. Para este diseño del controlador LQR que se va a tomar en cuenta para este sistema es:

Utilizar las constantes de las matrices A y B de los espacios de estados que son referente a la entrada del sistema linealizado.

El termino Q representa la prioridad del sistema debido a que va a permitir posición del péndulo. Y R , es la ponderación de salida es inversamente proporcional a la salida, del movimiento del péndulo. Estos valores van a ser manipulados hasta su optima calibración. Estos valores son:

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Ecu. (3. 49)}$$

$$R = 0.05$$

Emplear la función de Matlab

$$[K, S, e] = dlqr(A_d, B_d, Q, R), \quad \text{Ecu. (3. 50)}$$

Que calcula la matriz de ganancia óptima K tal que la ley de retroalimentación de estado, y donde el LQR es discretizado. Donde da como resultado las ganancias que son:

$$K_{lqr} = -8.7492 \quad -10.2806 \quad -224.6385 \quad -33.4802 \quad \text{Ecu. (3. 51)}$$

Estos valores son los que serán ingresados al controlador LQR, como se indica en la Figura 3.12, se representa el procedimiento a seguir para el control LQR.

Figura 3.12 Diagrama de diseño del control LQR

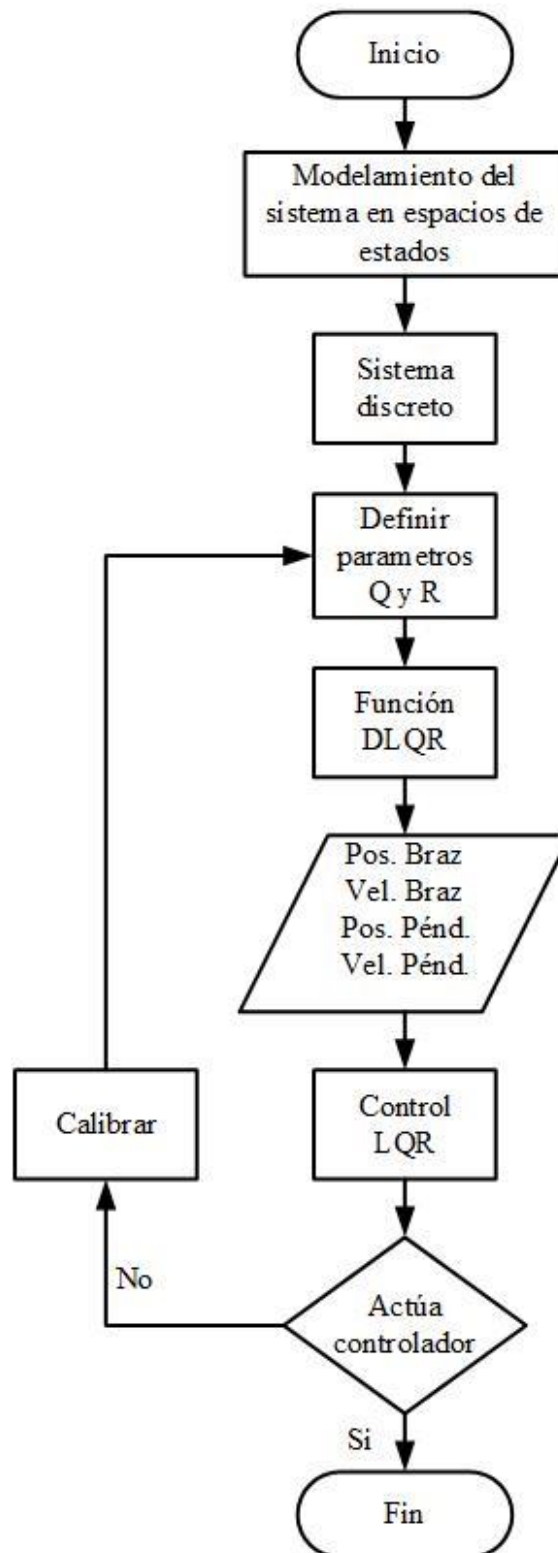


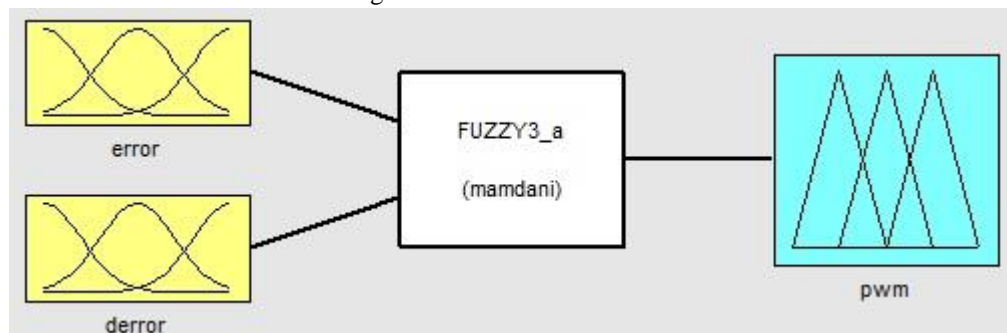
Diagrama del controlador LQR, Elaborado por: Andrés Salazar

3.6.3 Diseño del controlador Fuzzy

Es necesario que el diseñador deba conocer el funcionamiento y comportamiento de la planta que permita controlar el péndulo en posición hacia arriba.

Prosiguiendo con el proceso de este controlador, se utilizó el comando *fuzzy* de Matlab, que permite desarrollar en la ventana FIS Editor, en la cual se escoge el valor requerido de entradas y salidas. En este caso las entradas son el error y la variación del error y salida la cual va dirigirse al péndulo, como se indica en la Figura 3.13.

Figura 3.13 ventana FIS Editor



Configuración de entrada y salida para el controlador, Elaborado por: Andrés Salazar

Se utilizó cinco conjuntos difusos para cada variable de entrada al controlador, para definir las reglas de inferencia difusa se considera las siguientes etiquetas, Grande Negativo (GN), Pequeño Negativo (PN), Cero (Z), Pequeño Positivo (PP) y Grande Positivo (GP), se obtiene la siguiente Tabla 3.3.

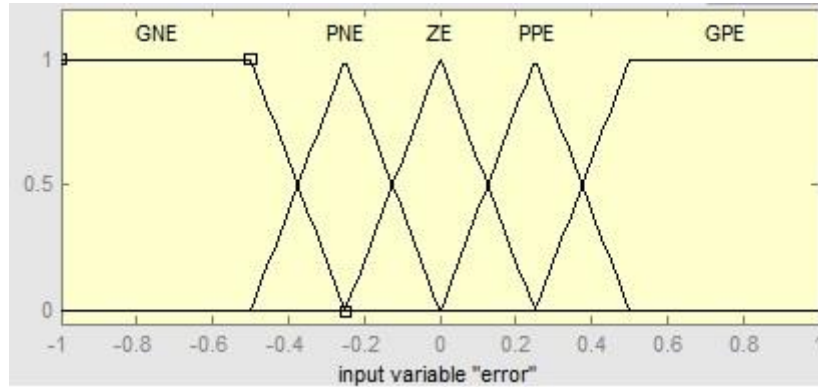
Tabla 3.3 Reglas de inferencia

| | | Error | | | | |
|-----------------|----|-------|----|----|----|----|
| | | GN | PN | Z | PP | GP |
| Variación error | GN | GP | GP | GP | PP | Z |
| | PN | GP | GP | PP | Z | PN |
| | Z | GP | PP | Z | PN | GN |
| | PP | PP | Z | PN | GN | GN |
| | GP | Z | PN | GN | GN | GN |

Reglas de inferencia con etiqueta, Elaborado por: Andrés Salazar

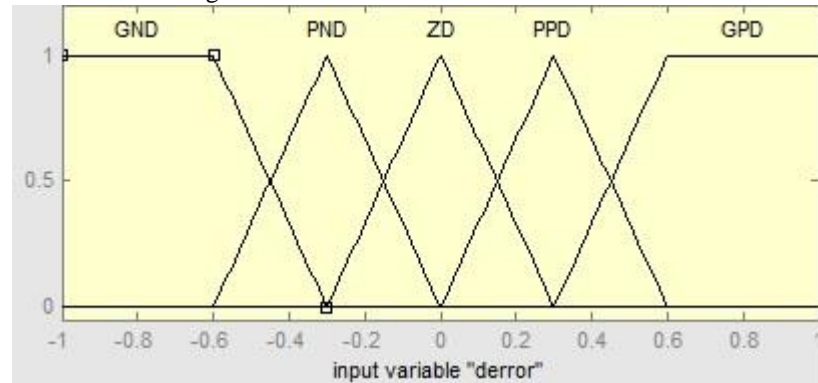
Las variables son representadas en las funciones de membresía son de tipo triangular debido a que reduce el tiempo de operación y aumentando la velocidad de respuesta. Están normalizadas de -1 a 1, como se observa en las Figuras 3.14, 3.15 y 3.16. (Kouro & Musalem, 2002)

Figura 3.14 Entrada del error de posición



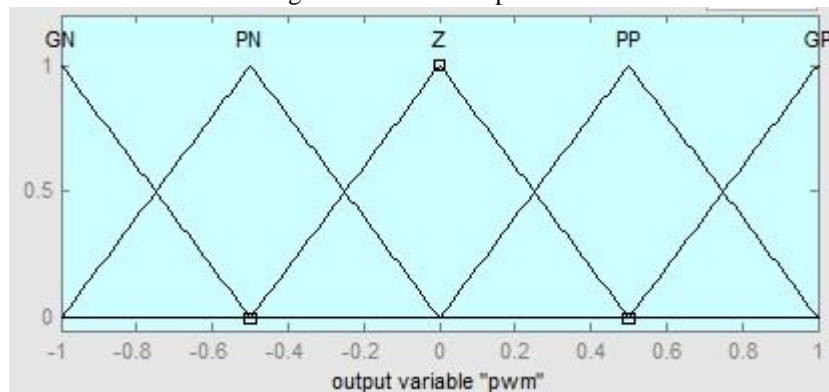
Funciones de membresía error posición, Elaborado por: Andrés Salazar

Figura 3.15 Entrada de la variación del error



Funciones de membresía variación de error, Elaborado por: Andrés Salazar

Figura 3.16 Salida al péndulo



Funciones de membresía salida, Elaborado por: Andrés Salazar

Como indica la Tabla 3.4 la configuración total para cada opción posible de este sistema es de un conjunto de veinticinco reglas de pertenencia de estructura SI-ENTONCES, las que cubren todas las posibilidades causas que puede existir en la planta.

Tabla 3. 4. Reglas de pertenencia

| | | | | | | |
|----|-------------------|-----|-----------------|------|-------------|---|
| 1 | If (error is GNE) | and | (derror is GND) | then | (pwm is GP) | 1 |
| 2 | If (error is GNE) | and | (derror is PND) | then | (pwm is GP) | 1 |
| 3 | If (error is GNE) | and | (derror is ZD) | then | (pwm is PP) | 1 |
| 4 | If (error is GNE) | and | (derror is PPD) | then | (pwm is PP) | 1 |
| 5 | If (error is GNE) | and | (derror is GPD) | then | (pwm is Z) | 1 |
| 6 | If (error is PNE) | and | (derror is GND) | then | (pwm is GP) | 1 |
| 7 | If (error is PNE) | and | (derror is PND) | then | (pwm is PP) | 1 |
| 8 | If (error is PNE) | and | (derror is ZD) | then | (pwm is PP) | 1 |
| 9 | If (error is PNE) | and | (derror is PPD) | then | (pwm is Z) | 1 |
| 10 | If (error is PNE) | and | (derror is GPD) | then | (pwm is PN) | 1 |

Reglas de pertenencia SI-ENTONCES, Elaborado por: Andrés Salazar

Como se indica en la Figura 3.17, se representa el procedimiento a seguir para el control Fuzzy.

Figura 3.17 Diagrama de diseño del control Fuzzy

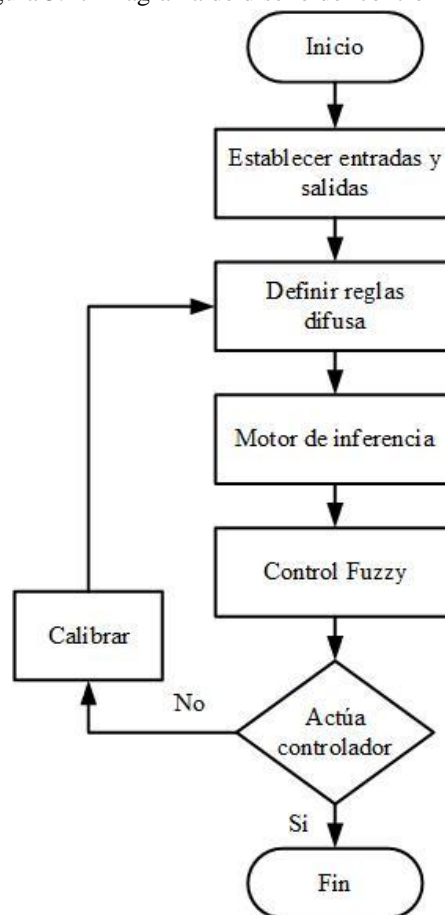


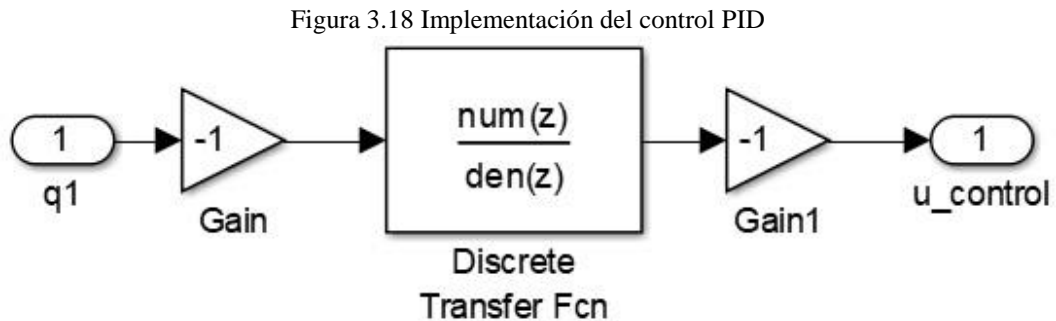
Diagrama del controlador Fuzzy, Elaborado por: Andrés Salazar

3.7 Implementación de los controladores

Para la implementación de cada uno de los controladores se utilizó Simulink de Matlab 2013.

3.7.1 Implementación del diseño de control PID

La realización del cómo se implementado el controlador PID, que se indica en la Figura 3.18, se exporta la configuración del controlador al panel principal de Matlab y se transforma a una nueva función de transferencia y esta se va a colocar en Discrete Transfer Fcn, esto se implementa en el péndulo y se obtiene el control deseado.



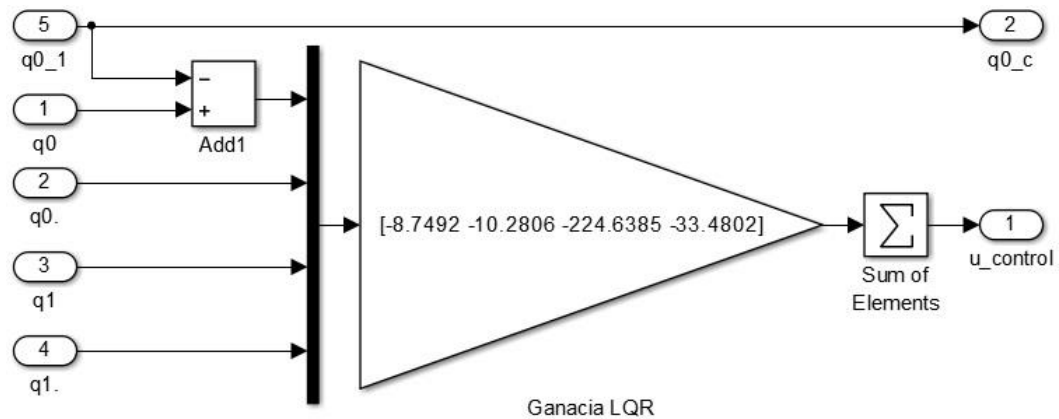
Implementación del control PID en Simulink, Elaborado por: Andrés Salazar

3.7.2 Implementación del diseño de control LQR

La implementación del controlador LQR, se necesita como entradas la posición y velocidad del brazo y del péndulo ($\theta_0, \dot{\theta}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1$) y sus constantes de ganancia ($k\theta_0, k\dot{\theta}_0, k\theta_1, k\dot{\theta}_1$) y como salida se obtiene la variable de control.

Básicamente se puede decir que el regulador cuadrático lineal es un controlador proporcional optimizado debido a que las salidas del sistema que en este caso son las posiciones y velocidades se multiplica con las constantes de ganancias, se suma todo y el resultado es la señal de control LQR, como indica la Figura 3.19.

Figura 3.19 Implementación del control LQR



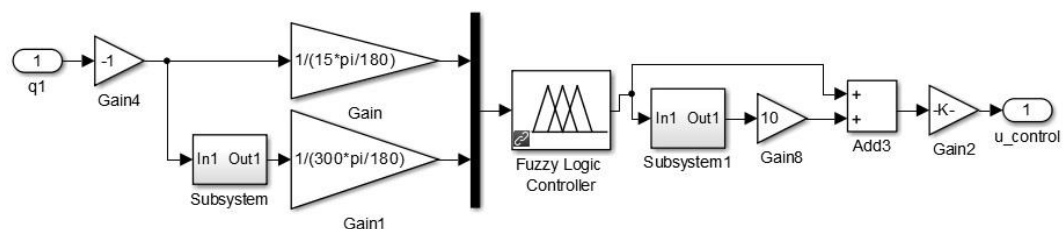
Implementación del control LQR en Simulink, Elaborado por: Andrés Salazar

3.7.3 Implementación del diseño Fuzzy

La implementación del controlador Fuzzy, se emplea un controlador que recibe dos entradas el error-posición e y la variación del error que esta es simplemente la derivada del error de/dt . Y como salida la señal de control que será aplicada al péndulo. El error se va a determinar con la diferencia del ángulo de referencia del sistema y el ángulo de posición, con este dato el controlador va a saber si está o no en el sitio de trabajo. La derivada del error simboliza la tasa de cambio del error, donde el controlador determinara si el error está en el sitio de trabajo. (Valenzuela, Montoya, & Giraldo, 2013)

Con el diseño de la logica difusa anteriormente realizada se procede a inportar los parametros definidos a el area de trabajo de Simulink se seleccionara dicho archivo que tendra el nombre con notacion fis, que se vaya a integrar al controlador como se observa en la Figura 3.20.

Figura 3.20 Implementación del control Fuzzy



Implementación del control Fuzzy en Simulink, Elaborado por: Andrés Salazar

3.8 Diseño e implementación del control Swing up

Debido a que en el modelo matemático y a las variables de estado ya linealizados anteriormente se localizan en zona de equilibrio muy cercano a cero (el punto cero

para este sistema es cuando el péndulo está en posición hacia arriba), entonces es preciso realizar un control alternativo que permita llegar al péndulo hasta la posición de equilibrio natural o inferior. (Montoya, Valenzuela, & Buitrago, 2012)

3.8.1 Diseño del control Swing up

Por lo tanto, la técnica frecuentemente más útil para este tipo de sistemas es el control swing up, como indica la Figura 3.21 el diagrama de diseño de swing up. Este tipo de controlador está establecido en la energía total del sistema. Basándose en (Toro , 2009) se obtiene que:

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = \dot{\theta}_1(-m_1 L_0 l_1 \ddot{\theta}_0 \cos \theta_1) \quad \text{Ecu. (3. 52)}$$

Figura 3.21. Diagrama del diseño del control Swing up

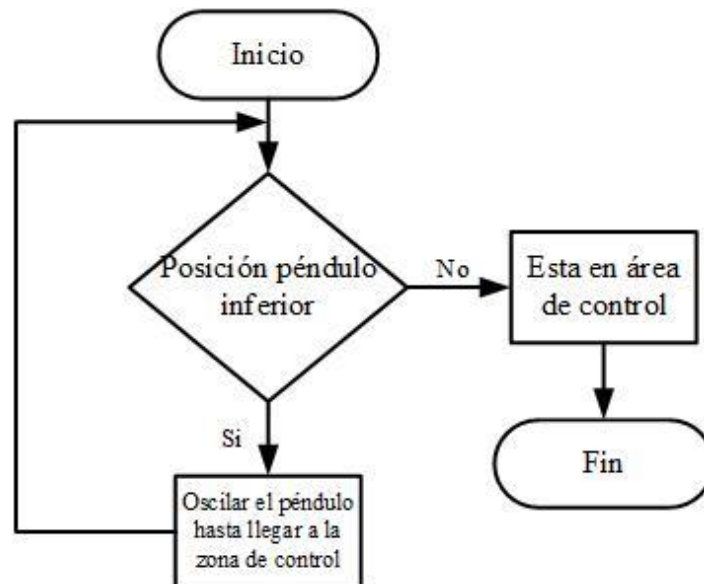
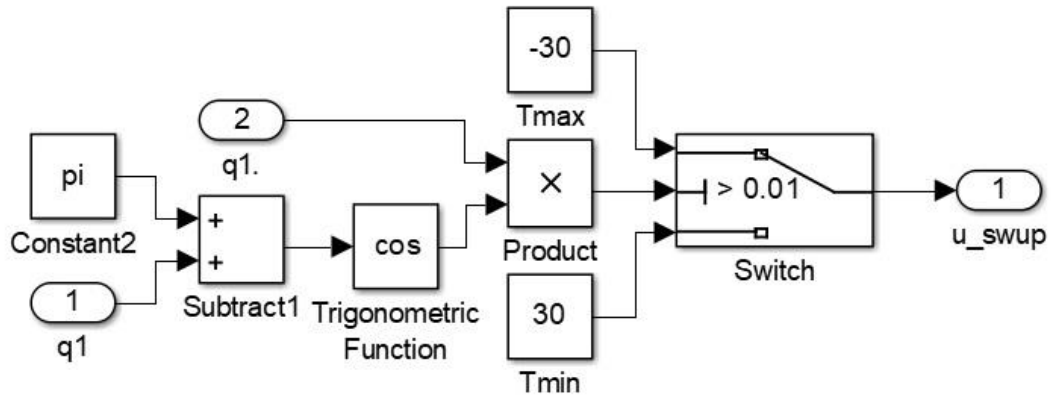


Diagrama del controlador Swing up, Elaborado por: Andrés Salazar

3.8.2 Implementación del control Swing up

La implementación del controlador swing up hay que definir que el movimiento de vaivén del péndulo en positivo o negativo se realiza con la posición del ángulo de péndulo θ_1 y se suma π se obtiene la función trigonométrica de coseno y se multiplica por la velocidad de péndulo $\dot{\theta}_1$, se define el 30% de PWM debido a que ciertos controladores se ven afectados por la velocidad generada por este control provocando inestabilidad en ellos, como indica la Figura 3.22.

Figura 3.22 Implementación del control Swing up



Implementación del control Swing up en Simulink, Elaborado por: Andrés Salazar

3.9 Base de datos

3.9.1 Diseño base de datos

El diseño de la base de datos se realizó tomando en cuenta tres consideraciones del comportamiento de péndulo con respecto a cada controlador. Entonces se creó una base de datos con Swing up, base de datos sin Swing up y base de datos con perturbaciones.

Se determinó diseñar de esta forma debido a que se requiere comparar y evaluar los controladores y el método más utilizado en este caso es la utilización de IAE.

3.9.2 Integral del error absoluto IAE

Se utiliza por ser muy sencilla de utilizar y además por suministrar un amortiguamiento y poseer respuestas favorables en el lazo de control de salida. Pero este concepto no es idóneo para mejorar sistemas con un mayor sobre amortiguamiento o subamortiguados. (Maroto, 2007)

Se utilizará el IAE, para determinar los cambios del comportamiento de los controladores, y observar el error que se genera en torno a su punto de equilibrio. Basándose en (Alfaro & Solera, 2006) El integral del error absoluto tiene como representación matemática. se obtiene que:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad \text{Ecu. (3. 53)}$$

3.9.3 Implementación base de datos

Para la implementación de la base de datos se realiza en Matlab, con 20 muestras de funcionamiento de cada controlador con un tiempo de muestreo de 25 segundos. Esto servirá para determinar el IAE.

Además, se determinó que el rango de registros para el del IAE desactivando Swing up es de ≤ 5 , y activando Swing up el rango de registros para el del IAE es de 30. Dichos valores son por criterio de clasificación de selección de señales, para comprobar que los registros de la planta no posean un alto error de control, y se guarde las señales para después compararlas. Una vez creado los registros de todos los controladores se procederá a determinar el IAE de cada una de las 20 muestras de la base de datos

CAPÍTULO 4

COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO

4.1 Pruebas de funcionamiento

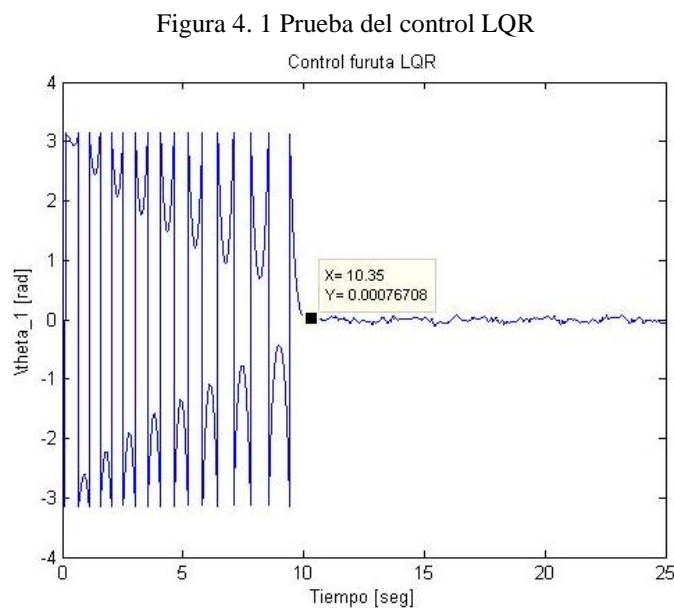
Las pruebas de funcionamiento se analizarán escogiendo aleatoriamente cualquiera de las 20 muestras realizadas para cada controlador. Para esto se realizará 3 tipos de pruebas de funcionamiento con la activación y desactivación del Swing up y la última evaluación es con una perturbación para observar cómo actúa el controlador.

4.1.1 Pruebas de funcionamiento activado el Swing up

Se analizará la gráfica de cada uno de los controladores habilitando el Swing up en Simulink.

Prueba de funcionamiento para el controlador LQR

Adquiriendo la señal de la muestra 14, se puede observar en la Figura 4.1, para que el Swing up llegue a la zona de control toma un tiempo aproximadamente de 10.148 segundos, a partir de ese tiempo la posición del péndulo se encuentra casi en su punto cero o posición hacia arriba, debido a que existe diminutas oscilaciones del brazo que provoca que el péndulo no se estabilice en el punto deseado.

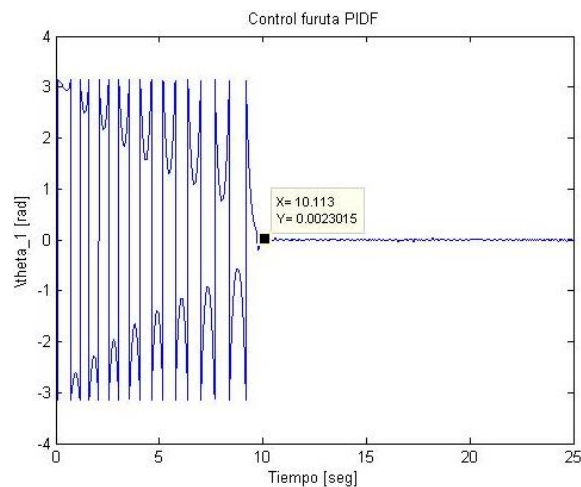


Funcionamiento del control LQR de la muestra 14, Elaborado por: Andrés Salazar

Prueba de funcionamiento para el controlador PID

Se analizará la señal de la muestra 18, se puede observar en la Figura 4.2, para que el Swing up llegue a la zona de control toma un tiempo aproximadamente de 10.113 segundos, a partir de ese tiempo la posición del péndulo se encuentra casi en su punto cero o posición hacia arriba, a diferencia del controlador anterior el control PID se encuentra en el punto cero dentro de la zona de equilibrio debido a que no posee ninguna oscilación en el comportamiento.

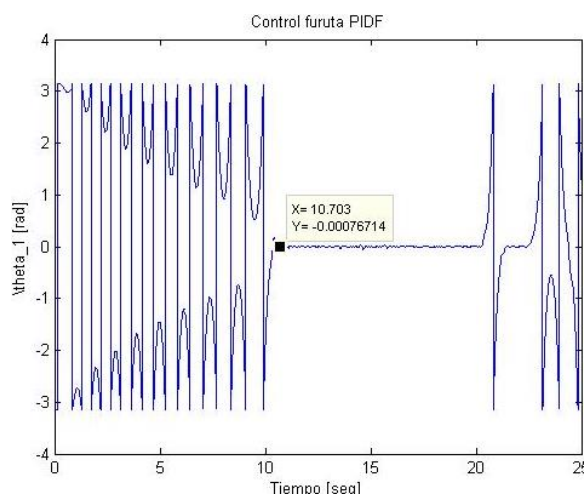
Figura 4. 2 Prueba del control PID



Funcionamiento del control PID de la muestra 18, Elaborado por: Andrés Salazar

En la Figura 4.3 se observa la señal de la muestra 8, que a veces el péndulo sale de su punto cero de la zona de control PID y actúa el Swing up para enviar nuevamente al péndulo a su posición hacia arriba, esto demuestra que están funcionando los controladores previamente mencionados.

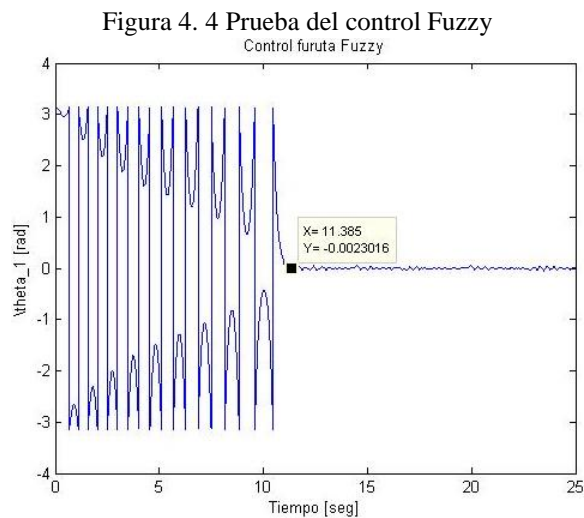
Figura 4. 3 Prueba del control PID



Funcionamiento del control PID de la muestra 8, Elaborado por: Andrés Salazar

Prueba de funcionamiento para el controlador Fuzzy

Se analizará la señal de la muestra 5, se puede observar en la Figura 4.4, para que el Swing up llegue a la zona de control toma un tiempo aproximadamente de 11.385 segundos, a partir de ese tiempo la posición del péndulo se encuentra casi en su punto cero o posición hacia arriba, debido a que se encuentra en el punto cero dentro de la zona de equilibrio, es muy similar al controlador anterior, a diferencia que el péndulo posee diminutas oscilaciones, pero se mantiene en el punto cero.



Funcionamiento del control Fuzzy de la muestra 5, Elaborado por: Andrés Salazar

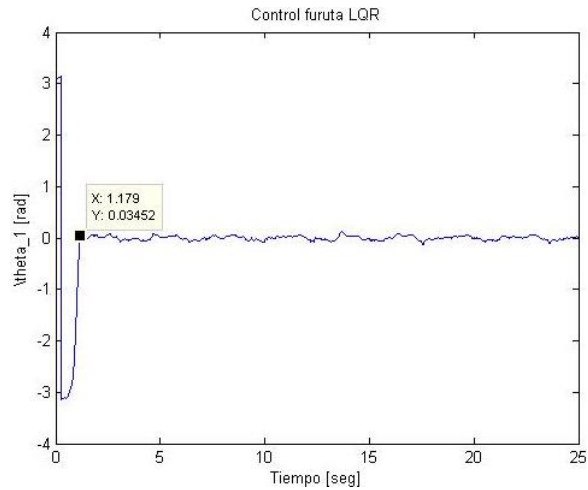
4.1.2 Pruebas de funcionamiento desactivado Swing up

Se analizará la señal de cada uno de los controladores deshabilitando el Swing up en Simulink. Y para lograr que llegue el péndulo a la zona de control se lo realizara manualmente así se observara directamente como está funcionando el controlador.

Prueba de funcionamiento para el controlador LQR

Analizando la señal de la muestra 14, se puede observar en la Figura 4.5, posee un pequeño sobreimpreso esto se debe a que al péndulo se lo hace llegar manualmente a la zona de control, como no está activo el Swing up para esta prueba, entonces se puede determinar que el controlador LQR está controlando ya que la señal posee un valor de cero, el tiempo de establecimiento fue de 1.179 segundos.

Figura 4. 5 Prueba del control LQR

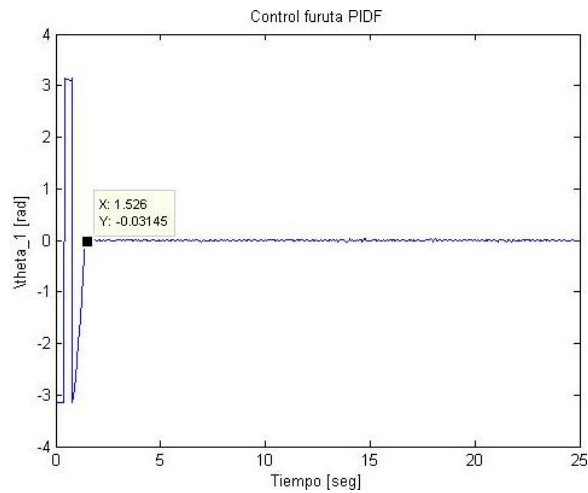


Funcionamiento del control LQR de la muestra 14, Elaborado por: Andrés Salazar

Prueba de funcionamiento para el controlador PID

Se analizará la señal de muestra 18, se puede observar en la Figura 4.6, posee la misma estimación de la muestra anterior con la diferencia que este control PID se mantiene en el punto cero sin ninguna pequeña oscilación en la señal que afecte su procedimiento, el tiempo de establecimiento fue de 1.526 segundos.

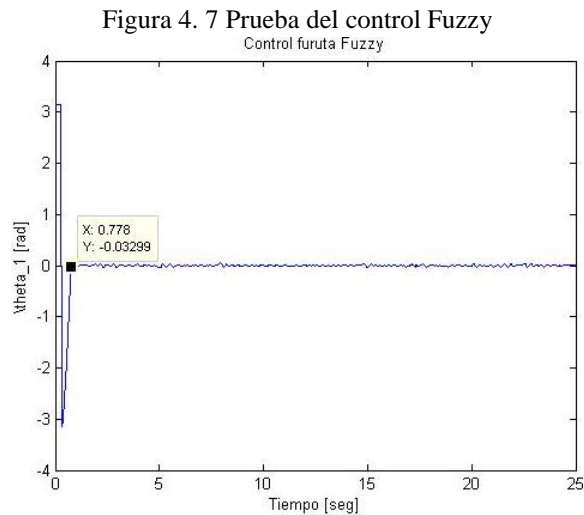
Figura 4. 6 Prueba del control PID



Funcionamiento del control PID de la muestra 17, Elaborado por: Andrés Salazar

Prueba de funcionamiento para el controlador Fuzzy

Se analizar la señal de la muestra 8, se puede observar en la Figura 4.7, posee la misma evaluación del controlador anterior a diferencia que este control Fuzzy mantiene la posición del péndulo en cero, pero existe unas diminutas oscilaciones en la señal que no afecta al comportamiento del controlador, el tiempo de establecimiento fue de 0.778 segundos.



Funcionamiento del control Fuzzy de la muestra 8, Elaborado por: Andrés Salazar

4.1.3 Respuestas de los controladores a perturbaciones

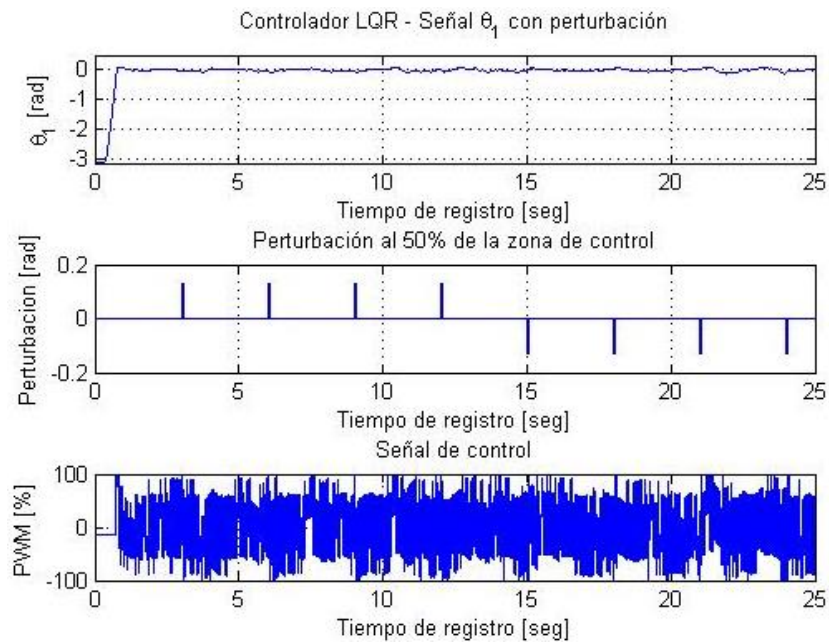
Se analizarán las señales de comportamiento de cada controlador realizando una perturbación que va a ser un pulso constante ejecutado desde el programa con el fin de evitar diferencias de perturbaciones entre los controladores para obtener las mejores respuestas manteniendo y examinar como estos reaccionan.

Las gráficas se realizaron en la zona de control estas constan de tres señales la primera es la posición del péndulo θ_1 , la segunda es la perturbación del tren de pulsos y se encuentra cada 3 segundos y la tercera es la respuesta de la señal de control. Esta prueba se realizará deshabilitando el Swing up en Simulink, con el fin de observar solo las acciones de control.

Respuesta de perturbación para el controlador LQR

Como se observa en la Figura 4.8, este controlador no le afecto el tren de pulsos inducidos a la señal de salida del LQR por lo tanto el péndulo se mantendrá en su posición hacia arriba o en la zona de control, entonces se podría decir que este control responde mejor a las perturbaciones debido a que es el más robusto en este sistema.

Figura 4. 8 Respuesta del controlador LQR a perturbaciones

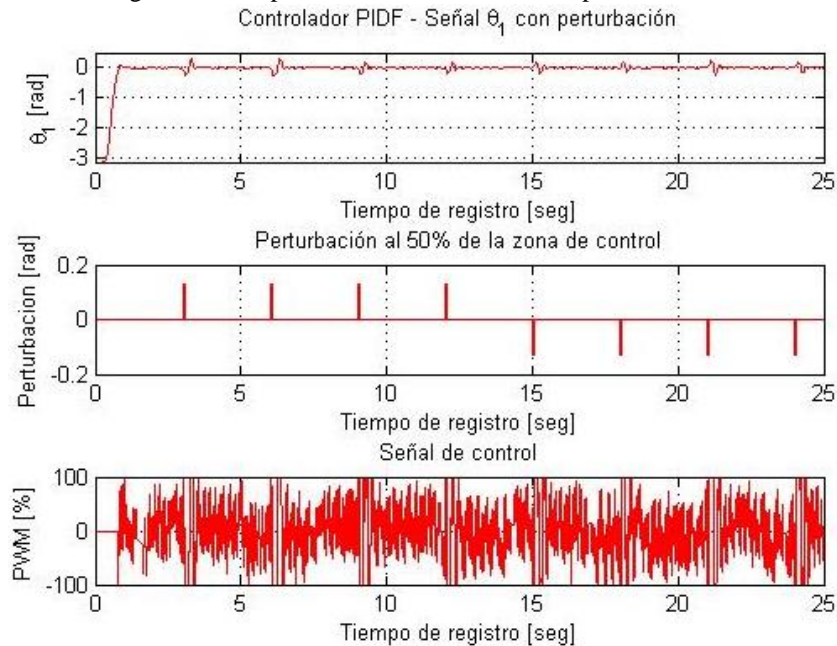


Perturbaciones al control LQR, Elaborado por: Andrés Salazar

Respuesta de perturbación para el controlador PID

Como se observa en la Figura 4.9, se puede apreciar cómo afecta el tren de pulsos a la posición del péndulo y a la vez a la señal de salida con un sobre impulso, por lo tanto, el péndulo tratara de mantener su posición en la zona de control, se podría determinar que las responde en menor medida las perturbaciones, pero su gran ventaja es que su equilibrio va a mantenerse en el punto cero.

Figura 4. 9 Respuesta del controlador PID a perturbaciones

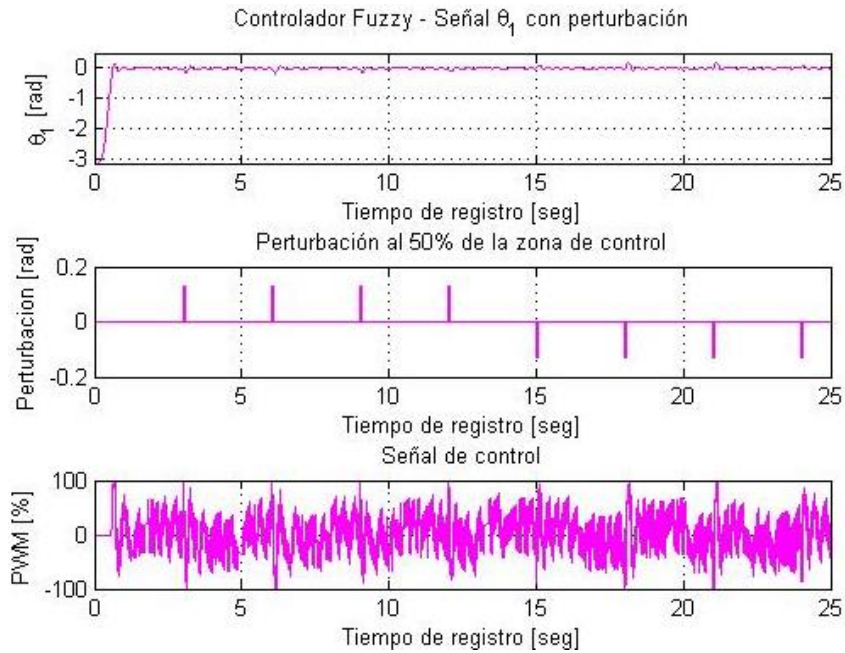


Perturbaciones al control PID, Elaborado por: Andrés Salazar

Respuesta de perturbación para el controlador Fuzzy

Como se observa en la Figura 4.10, este controlador es muy similar al controlador anterior, a diferencia que no le afecta en gran medida el tren de pulsos, pero mantiene unas reducidas oscilaciones que puede retrasar su estabilización además que la señal de salida es menos ruidosa y presenta mejor su comportamiento frente al sistema.

Figura 4. 10 Respuesta del controlador Fuzzy a perturbaciones



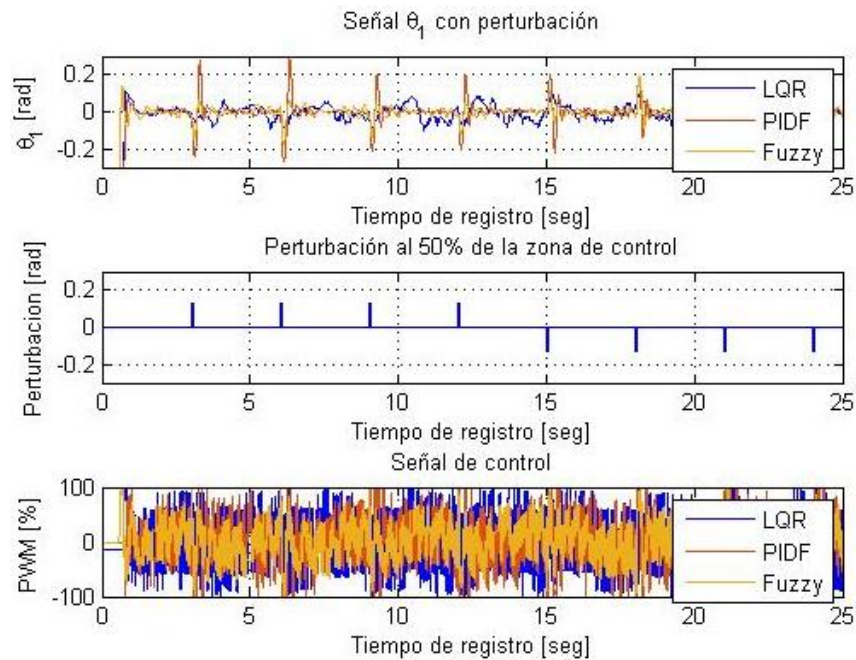
Perturbaciones al control Fuzzy, Elaborado por: Andrés Salazar

4.2 Comparación de controladores

Comparación de las señales de posición y control con perturbación

Para observar cómo responde todo el sistema a la perturbación del tren de pulsos se visualizará en la Figura 4.11, donde el controlador LQR responde mejor a las perturbaciones, pero no es muy estable, el PID posee un gran sobre impulso, pero es muy estable y el Fuzzy mantiene muy reducidas oscilaciones, pero su señal de control es la menos ruidosa.

Figura 4. 11 Respuesta de los tres controladores a perturbaciones



Comparación a perturbaciones al comportamiento de controladores, Elaborado por: Andrés Salazar

En la Tabla 4.1 se muestra el integral del error absoluto de las perturbaciones al sistema. Mediante esta información se determina que el menor error fue el control Fuzzy siendo así el que mejor respondió al sistema.

Tabla 4. 1 Resultado del IAE a las perturbaciones

| | Perturbaciones | | |
|-----|----------------|--------|--------|
| | LQR | PID | Fuzzy |
| IAE | 2.6397 | 2.3797 | 1.8555 |

Comparación de los controladores con el IAE, Elaborado por: Andrés Salazar

Comparación de las señales de posición con el integral de error absoluto

El IAE es un parámetro que permite evaluar el controlador, entonces se puede decir que la muestra que se obtiene del control es válida o no, siempre y cuando cumpla con el criterio de que el error tiene que ser menor igual a cinco para clasificar las señales que poseen menos error para la prueba 1, prueba 2 y para la prueba 3, se seleccionara las señales que mantengan el rango del error menor igual a treinta.

Prueba 1 IAE desactivado el Swing up

Para cada una de las muestras se realizó evaluando que el error varié de 0 a un valor máximo de 5, caso contrario la deseché con el fin de descartar las que podrían tener un error alto. Con estos datos se obtiene el promedio de cada controlador, se compara entre estos resultados y se determinó que para esta prueba el mejor control de los tres es el Fuzzy debido a que es el que posee el menor valor total de IAE, como se indica en la Tabla 4.2

Tabla 4. 2 IAE sin Swing up

| | PRUEBA 1 | | |
|----------------|---|---------------|---------------|
| | Integral del error absoluto desactivado Swing up | | |
| Muestra | LQR | PID | Fuzzy |
| 1 | 3,3528 | 3,1716 | 4,5302 |
| 2 | 2,7394 | 2,9910 | 2,0809 |
| 3 | 2,7083 | 4,0708 | 2,5877 |
| 4 | 3,9219 | 2,3006 | 3,2347 |
| 5 | 1,2797 | 2,9306 | 2,3417 |
| 6 | 3,6170 | 4,0084 | 3,1810 |
| 7 | 4,4694 | 3,1919 | 3,1464 |
| 8 | 3,2429 | 2,3797 | 2,0850 |
| 9 | 1,7806 | 2,9054 | 2,3031 |
| 10 | 2,3992 | 3,1385 | 2,9871 |
| 11 | 3,9741 | 2,4348 | 2,6335 |
| 12 | 1,3744 | 3,6957 | 3,2741 |
| 13 | 3,7768 | 1,6882 | 0,4860 |
| 14 | 1,4289 | 2,2177 | 2,5073 |
| 15 | 3,1895 | 2,5046 | 3,1865 |
| 16 | 3,0723 | 3,5228 | 3,5718 |
| 17 | 3,1754 | 3,7459 | 1,4155 |
| 18 | 3,5820 | 1,6841 | 2,5867 |
| 19 | 2,8312 | 3,5533 | 2,9093 |
| 20 | 3,4820 | 2,9095 | 3,9564 |
| Total | 2,9699 | 2,9523 | 2,7502 |

Comparación de los controladores desactivando el Swing up, Elaborado por: Andrés Salazar

Prueba 2 IAE activado el Swing up

Para cada una de las muestras se realizó evaluando que el error varié de 0 a un valor máximo de 30, al igual que en la prueba anterior se tomó el mismo criterio referente a obtener el promedio y al descartar el error si lo sobrepasa el valor máximo. Una vez que se obtienen los datos, se compara entre estos resultados y se determinó que para esta prueba el mejor control de los tres es el LQR debido a que es el que posee el menor valor total de IAE, como se indica la Tabla 4.3.

Tabla 4. 3 IAE activado el Swing up

| PRUEBA 2 | | | |
|---|----------------|----------------|----------------|
| Integral del error absoluto Activado el Swing up | | | |
| Muestra | LQR | PID | Fuzzy |
| 1 | 20,5404 | 20,8624 | 20,9747 |
| 2 | 21,4853 | 24,7203 | 20,3657 |
| 3 | 20,9442 | 22,9735 | 23,8619 |
| 4 | 21,7756 | 23,1819 | 22,1391 |
| 5 | 23,5505 | 22,3612 | 22,2601 |
| 6 | 22,9614 | 24,2125 | 20,3929 |
| 7 | 22,5530 | 24,7085 | 22,3004 |
| 8 | 22,7719 | 25,5386 | 21,9134 |
| 9 | 23,1435 | 22,4971 | 25,8052 |
| 10 | 22,7130 | 22,5818 | 24,7588 |
| 11 | 21,3677 | 23,8062 | 27,2546 |
| 12 | 21,7525 | 23,2542 | 20,0818 |
| 13 | 20,8232 | 25,7383 | 20,8308 |
| 14 | 20,1183 | 21,1860 | 20,0034 |
| 15 | 21,7363 | 20,6110 | 20,9181 |
| 16 | 21,9520 | 25,2809 | 25,1404 |
| 17 | 22,7382 | 26,3305 | 23,7530 |
| 18 | 23,9422 | 20,0587 | 22,7251 |
| 19 | 23,1512 | 18,9804 | 24,7083 |
| 20 | 23,1338 | 19,0644 | 23,3638 |
| Total | 22,1577 | 22,8974 | 22,6776 |

Comparación de los controladores activando Swing up, Elaborado por: Andrés Salazar

Prueba 3 IAE con perturbación desactivado el Swing up

Para esta prueba se tomó el mismo referente de las pruebas anteriores, evaluando que el error varié de 0 a un valor máximo de 5, caso contrario la deseché. Con estos datos se obtiene el promedio de cada controlador, se compara entre estos resultados y se determinó que para esta prueba el mejor control de los tres es el Fuzzy debido a que es el que posee el menor valor total de IAE.

Tabla 4. 4 IAE con perturbación desactivo el Swing up

| | PRUEBA 3 | | |
|----------------|--|---------------|---------------|
| | Integral del error absoluto con perturbación desactivado Swing up | | |
| Muestra | LQR | PID | Fuzzy |
| 1 | 3,3842 | 2,2234 | 3,8556 |
| 2 | 3,9302 | 4,4201 | 3,2617 |
| 3 | 3,8098 | 3,3738 | 1,0967 |
| 4 | 2,8257 | 2,8208 | 2,3569 |
| 5 | 3,0704 | 4,5826 | 2,9111 |
| 6 | 2,2368 | 3,0048 | 2,6590 |
| 7 | 2,6460 | 2,8359 | 1,6478 |
| 8 | 3,7971 | 1,6144 | 2,3370 |
| 9 | 2,2558 | 3,9280 | 1,5379 |
| 10 | 2,7070 | 3,7852 | 3,0933 |
| 11 | 2,8387 | 1,6694 | 2,6675 |
| 12 | 3,2676 | 3,9117 | 2,7271 |
| 13 | 3,1789 | 2,4295 | 2,4563 |
| 14 | 3,3479 | 2,4803 | 3,0343 |
| 15 | 3,1712 | 3,3804 | 2,4298 |
| 16 | 3,2643 | 2,9566 | 2,6717 |
| 17 | 2,5847 | 3,5122 | 1,0648 |
| 18 | 2,8195 | 2,4017 | 2,4044 |
| 19 | 3,3030 | 3,2409 | 3,5508 |
| 20 | 3,2197 | 3,2409 | 3,9214 |
| Total | 3,0829 | 3,0906 | 2,5843 |

Comparación de los controladores con perturbación desactivando el Swing up, Elaborado por:

Andrés Salazar

CONCLUSIONES

Se diseñó mecánicamente el péndulo invertido Furuta para que la base y el bastidor funcionen como soporte adicional para minimizar perturbaciones como vibraciones y oscilaciones cuando el sistema esté en funcionamiento.

Se desarrolló un modelo matemático basado en Euler-Lagrange, tomando en cuenta la cinemática de la planta y ecuaciones de energía, para lograr un control completo del sistema.

Se diseñó e implementó con las ecuaciones obtenidas del modelo matemático tres tipos de controladores PID, LQR y Fuzzy, los cuales poseen características propias que afectan el comportamiento del sistema y el beneficio de esto es que el péndulo llegue a la posición hacia arriba.

En las pruebas de funcionamiento se comprobó que el péndulo invertido Furuta cumplió con el objetivo que era mantener su posición en el punto cero, dependiendo del controlador que se esté ejecutando pueden existir perturbaciones que afectan su acción.

Se determinó que el controlador LQR es un sistema robusto debido a que se utiliza todos los parámetros de salida del sistema, esto significa que mantiene pequeñas oscilaciones porque trata de controlar el brazo y el péndulo, a pesar de esto se mantiene en la zona de control, posee la ventaja de que con el uso de Swing up no le afecta gravemente el comportamiento a diferencia de los otros dos controles.

Se determinó que para la prueba activado el Swing up, el que mantiene una mejor respuesta fue el control LQR, a relación de los demás controladores, desactivando el Swing up el que mejor se adaptó fue el Fuzzy, y en esta misma prueba, pero con la condición de perturbación fue este mismo controlador, logrando así ser el más estable de los tres.

RECOMENDACIONES

La implementación mecánica debe realizarse con materiales que ayuden agregando peso para reducir movimientos no deseados que afecten el comportamiento del sistema, además si se utiliza el mismo mecanismo de diseño en futuras investigaciones se recomendaría incorporar un rigidizador con el fin de reducir vibraciones en puntos débiles de la planta.

Al momento de realizar las pruebas de los controladores, reiniciar el sistema ya que si no se lo hace el péndulo generara una gran velocidad y fuerza lo que podría ocasionar daño al motor o la estructura y especialmente puede golpear a la persona que está más cercana a la planta.

Simulink de Matlab es una gran herramienta utilizada generalmente para este tipo de proyectos investigativos y de amplia variedad de librerías permite diseñar e implementar cualquier tipo de controlador.

BIBLIOGRAFÍA

- Alberto, H., Marco, L., Jaime, P., Matilde, S., & José, M. (2012). *Control Inteligente del Pendulo Invertido*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Alfaro, V., & Solera, E. (2006). *Sintonización de controladores PI y PID utilizando modelos de polo doble más tiempo muerto*. San José.
- Anaguano, C., & Gordillo, R. (2016). *Diseño de un sistema de control para un péndulo invertido rotacional*. Sangolquí: Universidad de las Fuerzas Armadas, Departamento de eléctrica y electrónica, Carrera de ingeniería electronica, automatización y control.
- Beltran, J. L., & Salazar Morocho, A. (2010). *Simulacion de un pendulo invertido*.
- Buitrago, J., García, G., & Ramírez, J. (2015). *Control de un péndulo de Furuta, una revisión del estado del arte*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Gäfvert, M. (1998). *Modelling the Furuta Pendulum*. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- Garcia, J. R. (2015). *Diseño e implementación de un péndulo invertido sobre un carro móvil para el laboratorio de mecatrónica de la FIMCP aplicando estrategias de control proporcional integral derivativo (PID)*. GUAYAQUIL.
- Hernández, A., Legaspi, M., Peláez, J., Santos, M., & Martín, J. (2012). *Control Inteligente del Pendulo Invertido*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Kouro, S., & Musalem, R. (2002). *Control Mediante Lógica Difusa*. Valparaíso: Universidad Técnica Federico Santa Maria .
- Luna, F. C. (2003). *Levantamiento y Estabilización del Péndulo Invertido*. Mexico.

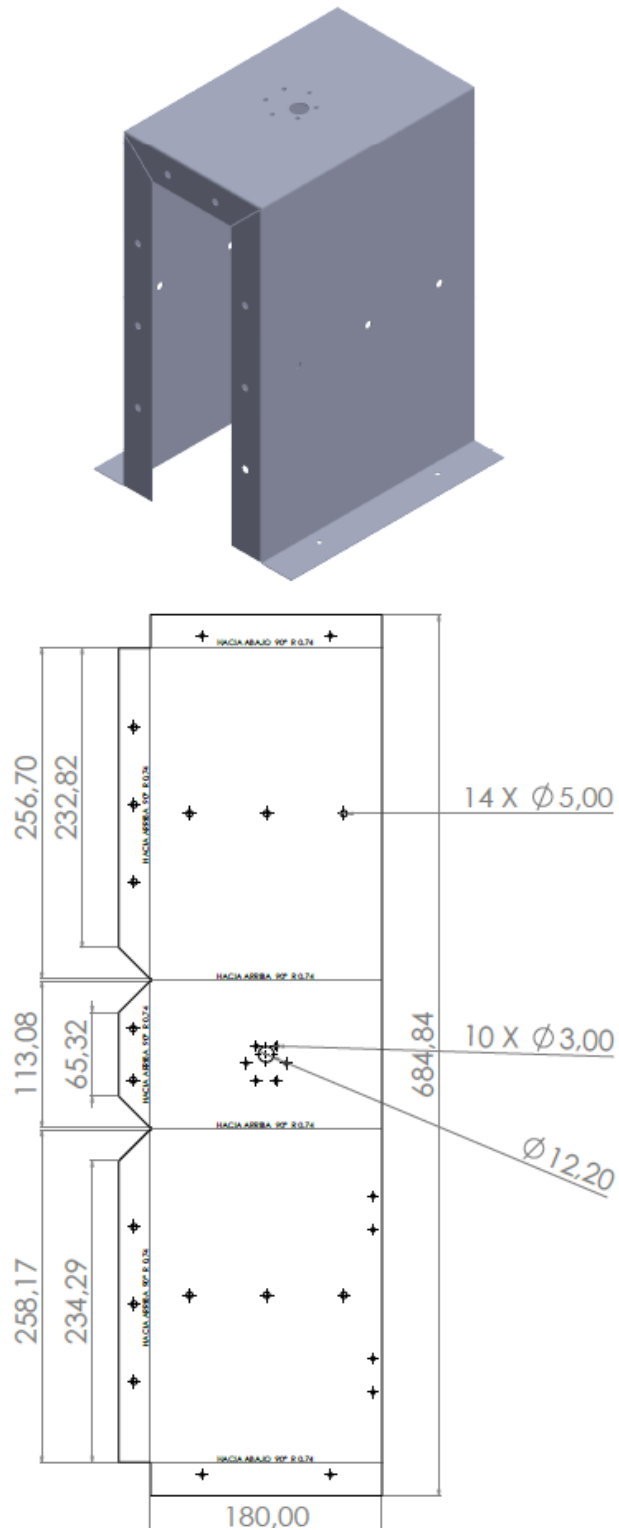
- Maroto, R. (2007). *Ecuaciones para la sintonización de controladores PID con acción derivativa aplicada a la señal realimentada*. San José: Universidad de Costa Rica .
- MathWorks. (s.f). *Tustin Approximation*. Recuperado el 2 de Julio de 2018, de <https://la.mathworks.com/help/control/ug/continuous-discrete-conversion-methods.html>
- Mathworks. (s.f.). *ss2tf MatLab*. Recuperado el 2 de Julio de 2018, de <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/ss2tf.html#buh8h8y-2>
- Montoya, O., Valenzuela, J., & Buitrago, D. (2012). *Control global del Péndulo Rotacional Invertido empleando modelos de energía*. Pereira: Facultad de Ingenierías, Programa de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- Newcastle, U. d. (21 de 11 de 2017). *www.newcastle.edu.au*. Obtenido de <http://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut2/etc/InvPen/invS.html>
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderno*. Madrid: Pearson Educación, S.A.
- Osorio, C. (2009). *Diseño, construcción y control de un péndulo invertido rotacional utilizando técnicas lineales y no lineales*. Bogota: Universidad Nacional de Colombia.
- Toro , R. (2009). *Diseño y control de un péndulo Furuta para su utilización en las aulas de clase de la Universidad EAFIT*. Medellin: Universidad EAFIT, Escuelas de Ingenierías, Departamento de Ingeniería Mecánica.
- Valenzuela, J., Montoya, O., & Giraldo, D. (2013). *Logica difusa aplicada al control local del péndulo invertido con rueda de reacción*. Pereira: Facultad de Ingenieria Electrica, Universidad Tecnológica de Pereira .

ANEXOS

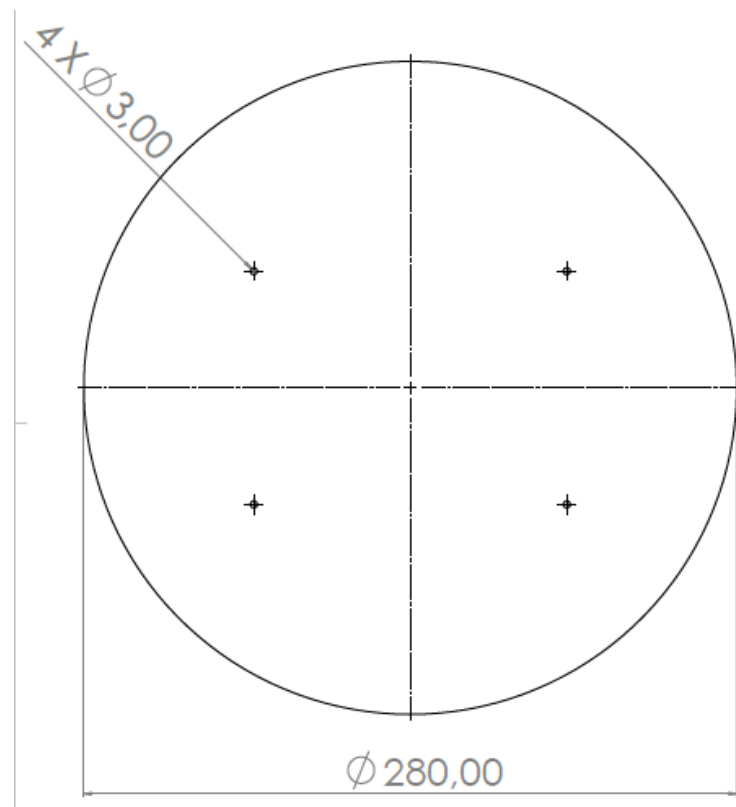
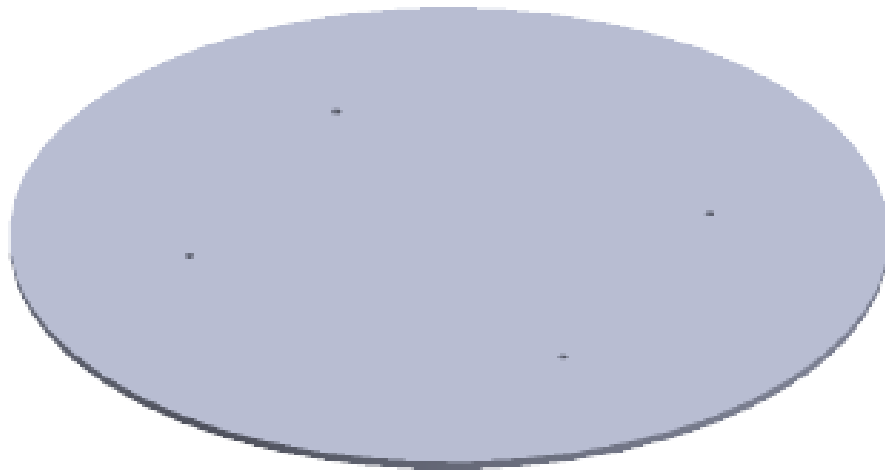
Anexo 1

Todos los diseños fueron realizados en SolidWorks.

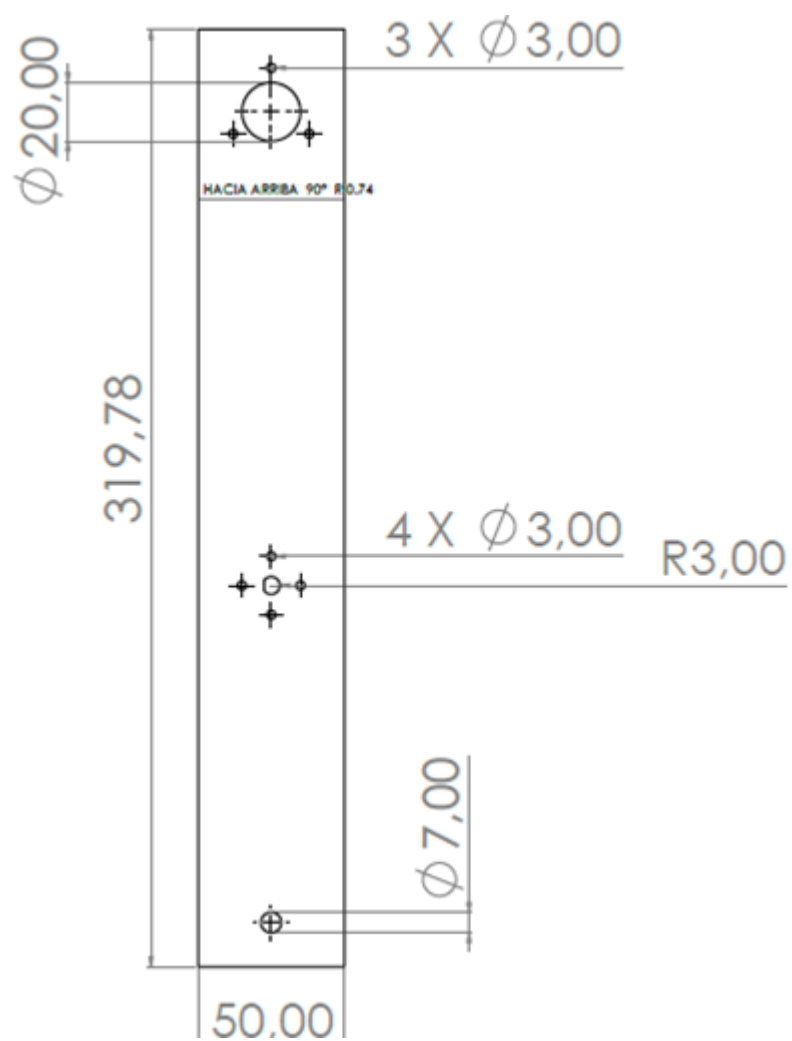
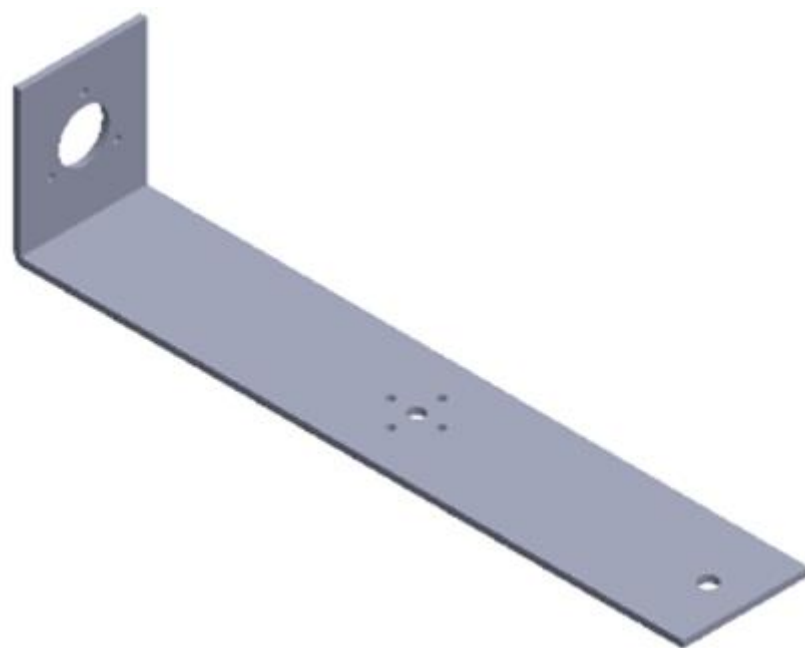
Diseño del bastidor.



Diseño base pendular.



Diseño de brazo con acople par motor.



Diseño de brazo con acople par motor.

